Олимпиада «Высшая проба» по математике

8 класс, 2021 год

1. Вася прибавил к числителю и знаменателю правильной дроби одно и то же натуральное число, меньшее как числителя, так и знаменателя. В результате дробь увеличилась более чем на 50%. Вася утверждает, что, если он отнимет это число от числителя и знаменателя исходной дроби, то дробь уменьшится менее, чем на 50%. Может ли так быть?

2. В коробке лежат шарики двух цветов: синего и красного (оба цвета присутствуют). Известно, что синих шариков больше, а два шарика одного цвета можно вынуть с той же вероятностью, что и два шарика разных цветов. Чему может быть равна разность между числом синих и красных шариков? Дайте полный и обоснованный ответ на этот вопрос.

3. В ряд расставлены 2020 натуральных чисел так, что среди любых шести чисел, идущих подряд, первое число нацело делится на последнее, и среди любых девяти чисел, идущих подряд, последнее число нацело делится на первое. Докажите, что сумма первых ста чисел нацело делится на сумму последних ста чисел.

4. Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d, для которых выполнены равенства

$$\begin{cases} a+b=cd; \\ c+d=ab. \end{cases}$$

5. В треугольнике ABC угол B равен 80°. На стороне BC отмечена точка D такая, что $AB=AD=CD$. На стороне AB отмечена точка F такая, что $AF=BD$. На отрезке AC отмечена точка E такая, что $AB=AE$. Найдите угол AEF.

6. В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 100 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если: а) $n=404$; б) $n=406$?