Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2021 год

1. Для действительного числа $\alpha \in (0,1)$ рассмотрим возрастающую последовательность всех натуральных чисел m_i, для которых $\{m_i\alpha\} < \alpha$. Может ли для какого-то α соответствующая последовательность начинаться с

а) 2021, 4041, 6062?

б) 2021, 4042, 6062, 8082?

2. В последовательности чисел $2^0, 2^1, 2^2, \ldots$ некоторые члены умножили на -1, причем известно, что осталось бесконечно много положительных членов. Докажите что любое натуральное число представимо в виде суммы нескольких различных членов полученной последовательности.

3. В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 20 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если: а) $n = 84$; б) $n = 86$?

4. В угол AOC вписаны окружности Ω_1 и Ω_2 (радиус Ω_1 больше). Ω_1 касается сторон угла в точках A и B, а Ω_2 — в точках D и C соответственно. Точка M — середина отрезка BC. Прямые MA и MD вторично пересекают Ω_1 и Ω_2 соответственно в точках X и Y. Прямые BX и CY пересекаются в точке Z. Докажите что прямая MZ проходит через середину отрезка AD.

5. Дана пара взаимно-простых многочленов с действительными коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$ степеней 2021 и 2000 соответственно (*взаимно-простые* означает, что не существует многочлена $R(x)$, не равного константе, на который делятся $P(x)$ и $Q(x)$). Гриша выбирает конечное множество действительных чисел $c_1, \ldots, c_n$ (помните, в *множестве* элементы не повторяются, размер множества Гриша тоже выбирает сам), находит число различных кратных действительных корней у многочлена $P(x)+c_iQ(x)$ (при i от 1 до n) и складывает полученные числа. Какую наибольшую сумму Гриша может получить в результате этого процесса?

6. ABC — равносторонний треугольник на плоскости, а S — круг, концентрический с описанной окружностью треугольника ABC, но имеющий вдвое больший радиус, пусть его радиус равен 1. Применить к точке X на плоскости *операцию* — значит, отразить точку X симметрично относительно ближайшей вершины треугольника ABC (если ближайших вершин две, выбираем одну из двух произвольным образом).

а) Докажите, что любая точка плоскости за конечное число операций попадет в круг S.

б) Пусть d — расстояние от центра S до какой-то точки, попадающей в круг S после ровно 2021 операции. Найдите промежуток возможных значений d.

7. Для таблички $n \times n$ рассматриваем семейство квадратов 2×2, состоящих из клеток таблицы, и обладающее свойством: для любого квадрата семейства найдется покрытая им клетка, не покрытая никаким другим квадратом из семейства. Через $f(n)$ обозначим максимальное количество квадратов в таком семействе. Для какого наименьшего C неравенство $f(n) \leqslant Cn^2$ верно при любом n?