

Олимпиада «Высшая проба» по математике

10 класс, 2021 год

1. Через $\langle x \rangle$ обозначим ближайшее к x целое число (условимся, что $\langle n + \frac{1}{2} \rangle = n$ при целом n). Положим $b_k = k + \langle \sqrt{k} \rangle$. Выпишем все натуральные числа, не встречающиеся в последовательности b_1, b_2, b_3, \dots в порядке возрастания; получим последовательность a_1, a_2, a_3, \dots . Найдите явную формулу для числа a_n .

2. Число x_1 случайным образом выбирается на отрезке $[0, 2]$ (вероятность того, что x_1 попадет в заданный интервал на отрезке $[0, 2]$, пропорциональна длине этого интервала). Далее строится последовательность x_n , такая, что

$$x - n + 1 = 3|x_n - 1| - 1, \quad n \geq 1.$$

Какова вероятность того, что $x_{2021} \in [0, 2]$?

3. В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 100 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если а) $n = 404$; б) $n = 406$?

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . Точки M и N лежат на сторонах AD и CD соответственно. Прямые, проходящие через M и N и параллельные соответственно AB и BC , пересекаются в точке P , лежащей внутри четырехугольника $ABCD$, а прямая BP повторно пересекает ω в точке Q , лежащей на дуге CD . Докажите, что точки M, N, P, Q лежат на одной окружности.

5. Сережа задумал натуральное число n , не превосходящее 2019. Сначала он делит его с остатком на 202, получая неполное частное q_1 и остаток r_1 . Затем на i -ом шаге ($i = 2, 3, \dots$) он делит с остатком число $\overline{r_{i-1}q_{i-1}}$ на 202, получая неполное частное q_i и остаток r_i . Докажите, что $0, q_1q_2q_3 \dots = \frac{n}{2019}$.

6. В вершине A правильного треугольника ABC со стороной $3n$ метров (где n — натуральное число), стоит невидимый точечный робот, а в точке пересечения медиан треугольника ABC лежит мина. Робота можно отдавать команду сдвинуться на 1 метр в любом из 6 направлений, параллельных сторонам треугольника. Любую команду робот может проигнорировать, но тогда обязан исполнить следующую за ней, если она приказывает двигаться в том же направлении. Кроме того, если команда приказывает выйти за границы треугольника, робот стоит на месте и это не считается игнорированием команды. При каких n можно заставить робота наехать на мину?

7. Пусть ABC — равносторонний треугольник на плоскости, а S — круг, концентрический с описанной окружностью треугольника ABC , но имеющий вдвое больший радиус. Пусть радиус круга S равен 1. Применить к точке X на плоскости *операцию* — значит отразить точку X симметрично относительно ближайшей вершины треугольника ABC (если ближайших вершин две, выбираем одну из двух произвольным образом).

- а) Докажите, что любая точка плоскости за конечное число операций попадет в круг S .
- б) Пусть d — расстояние от центра S до какой-то точки, попадающей в круг после ровно 1000 операций. Найдите максимум и точную нижнюю грань возможных значений d .