

## Олимпиада «Высшая проба» по математике

8 класс, 2020 год

1. В самолёте летят жители города лжецов и жители города рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда обманывают. Все пассажиры сели в ряды по 4 человека, и бортпроводник задал каждому пассажиру один и тот же вопрос. «Верно ли, что в вашем ряду столько же Ваших земляков, сколько жителей другого города?» Прозвучало ровно 70 утвердительных ответов. Сколько лжецов летит в самолёте? Человек считается своим собственным земляком.

2. Имеется дробь  $\frac{1}{n}$ . Восьмиклассник Вася каждую минуту прибавляет к её числителю и знаменателю по 1 и смотрит, можно ли сократить полученную дробь. Вася утверждает, что первый раз сократимая дробь получилась после 1000 шагов. Стоит ли ему верить?

3. Имеется прямоугольный параллелепипед. Вася считает, что при увеличении каждого из его рёбер на 1 см полная поверхность параллелепипеда увеличится на  $9 \text{ см}^2$ , а объём увеличится на  $5 \text{ см}^3$ . Может ли он оказаться прав?

*Замечание.* Прямоугольный параллелепипед — фигура, напоминающая куб, но, рёбра, выходящие из одной вершины, у неё могут иметь различную длину. Её объём равен произведению длин трёх рёбер, выходящих из одной вершины.

4. На стороне  $BC$  параллелограмма  $ABCD$  выбрана точка  $M$  так, что равнобедренным оказался каждый из треугольников  $ABM$ ,  $AMD$ ,  $CDM$ . Найдите все возможные значения углов параллелограмма при этих условиях. (Ответ нужно выразить в градусах).

$$\angle A = \angle C = \angle D = \angle B = 90^\circ \text{ или } \frac{\angle A}{90^\circ} = \frac{\angle C}{90^\circ} = \frac{\angle D}{90^\circ} = \frac{\angle B}{90^\circ} = 90^\circ$$

5. Вершины 2019-угольника покрашены в два цвета: 1010 синих и 1009 красных. Сторона с двумя красными вершинами помечена числом 2, сторона с двумя синими вершинами помечена числом  $\frac{1}{2}$ , а сторона с разноцветными вершинами помечена числом 1. Найдите все возможные значения произведения всех чисел, которыми помечены стороны.

6. Рассматриваются наборы из семи гирь с суммарным весом 1 (вес каждой гири неотрицателен). Назовем поднабор *большим*, если сумма весов гирь поднабора больше или равна  $\frac{2}{3}$ . Для каждого поднабора найдём число больших поднаборов. Найдите минимум этого числа по всем наборам.