

Олимпиада «Высшая проба» по математике

10 класс, 2020 год

1. В таблице 9×9 расставлены различные натуральные числа, сумма которых равна $2S$. Известно, что в каждой строке числа возрастают слева направо, а в каждом столбце — снизу вверх. Может ли сумма чисел в центральном квадрате 5×5 быть больше S ?
2. Дан описанный четырёхугольник $ABCD$, у которого радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и ADC равны. Найдите угол между диагоналями AC и BD .
3. В последовательности чисел Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ каждое следующее число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Докажите, что среди чисел Фибоначчи нет ни одной натуральной степени числа 7.
4. Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого длины всех рёбер иррациональны, а объём, полная поверхность и большая диагональ — числа целые? (*Прямоугольный параллелепипед* — это фигура в пространстве, задаваемая неравенствами $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$, где $a, b, c > 0$ — фиксированные числа. *Большая диагональ* — это максимальное расстояние между вершинами параллелепипеда.)
5. Дано несколько вещественных чисел, по модулю не превосходящих 1. Сумма всех чисел равна S . Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы при некотором натуральном $n < 100$ сумма выбранных чисел отличалась от $\frac{nS}{100}$ не более чем на $\frac{1}{100}$.
6. Рассматриваются наборы из семи гирь с суммарным весом 1 (вес каждой гири неотрицателен). Назовем поднабор *большим*, если сумма весов гирь поднабора больше или равна $2/3$. Для каждого набора найдем число больших поднаборов. Найдите минимум этого числа по всем наборам.
7. Даны m подмножеств n -элементного множества: A_1, \dots, A_m . Обозначим через $|A_i|$ число элементов множества A_i . Рассмотрим неравенство

$$n^2 \sum_{i,j,k=1}^m |A_i \cap A_j \cap A_k| \geq (|A_1| + \dots + |A_m|)^3,$$

в котором индексы i, j, k пробегают все значения от 1 до m , то есть в сумме всего m^3 слагаемых.

- а) Докажите это неравенство при $m = 3$.
- б) Докажите это неравенство при произвольном натуральном m .