Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2019 год

1. Про вещественные числа a, b и c известно, что $abc + a + b + c = 10$ и $ab + bc + ac = 9$. Для каких чисел x можно утверждать, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно x? (Найдите все такие числа x и докажите, что других нет.)

2. Мистер A час простоял в точке с координатами $(0, 0)$. За этот же час, двигаясь равномерно и прямолинейно, мистер B дошел от точки $(22, 0)$ до точки $(2, 20)$. За этот же час мадемуазель C, тоже двигавшаяся равномерно и прямолинейно, прошла от точки $(30, 4)$ до точки $(0, 24)$. Сколько раз за указанный период наблюдения принимала целые значения площадь треугольника ABC? Начальный и конечный момент включаются.

$\boxed{53}$

3. Из n правильных шестиугольников со стороной 1 сделали многоугольник на плоскости, склеивая шестиугольники по сторонам. Любые два шестиугольника либо имеют ровно одну общую сторону, либо вообще не имеют общих точек. Внутри многоугольника нет дыр. При этом у каждого шестиугольника хотя бы одна сторона лежит на границе многоугольника. Какой наименьший периметр может иметь многоугольник при данных условиях?

$\boxed{2n + 6 \text{ при } n \geqslant 2,\ 6 \text{ при } n = 1}$

4. Через вершины треугольника ABC проведены три параллельные прямые a, b, c соответственно, не параллельные сторонам треугольника. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки пересечения пар прямых a и B_0C_0, b и C_0A_0, c и A_0B_0 соответственно. Докажите, что прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.

5. Рассмотрим всевозможные приведенные квадратные трехчлены $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами p и q. Назовем областью значений такого трехчлена множество его значений во всех целых точках $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Какое наибольшее количество таких трехчленов можно выбрать, чтобы их области значений попарно не пересекались?

6. Последовательность чисел $\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)$ называется перестановкой длины n, если каждое из чисел $1, 2, \ldots, n$ встречается в этой последовательности ровно один раз. Например, $\tau(1) = 3, \tau(2) = 2, \tau(3) = 1$ — перестановка длины 3. Найдите все n, для которых найдется перестановка $\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)$, удовлетворяющая четырем условиям:

- Числа $\tau(i) - i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.
- Числа $\tau(i) - 2i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.
- Числа $\tau(i) - 3i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.
- Числа $\tau(i) - 4i$ для всех i от 1 до n включительно имеют попарно различные остатки от деления на n.