Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2018 год

Все задачи оценивались в 20 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 50 баллов.

1. От домика Тофслы и Вифслы отходят 6 прямых дорог, разделяющих окрестное круглое поле на 6 равных секторов. Тофсла и Вифсла отправляются в путешествие из своего домика в центре поля со скоростью 5 км/ч, случайно независимо друг от друга выбрав себе дорогу, по которой идти. С какой вероятностью расстояние между ними через час составит более 7 км?

$\boxed{\frac{1}{2}}$

2. Фонари располагаются на плоскость, освещая все точки угла южнее и западнее себя. (То есть фонарь в точке с координатами (a, b) освещает точки (x, y) с координатами $x \leqslant a$ и $y \leqslant b$.) На плоскость уже выставили 2018 синих фонарей, поместив их в различные точки. Можно ли дорасставить на плоскости 2017 красных фонарей так, что любая точка плоскости, освещённая ровно $k > 0$ синими фонарями, будет освещена ровно $k - 1$ красным фонарём? (Красные фонари можно располагать в точки, занятые другими фонарями, предполагая, что это не мешает освещению.)

3. Треугольник ABC, в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O. В нём проведены высоты AA' и BB', и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA', ON и MB' пересекаются в одной точке.

4. В таинственном лесу два мудреца в чёрном и белом колпаках раздают гномикам грибочки. К ним в две очереди выстроились $2n$ гномиков, n в чёрных и n в белых колпаках. Если к мудрецу подходит гномик с таким же цветом колпака, то гномик получает грибочек и удаляется, а иначе отправляется в конец очереди к другому мудрецу. За какое наименьшее количество направлений в другую очередь мудрецы могут раздать всем гномикам по грибочку, если в процессе раздачи мудрецы могут один раз поменяться колпаками? (Мудрецы сами решают, в какой момент и к кому из них подойдёт следующий гномик из соответствующей очереди. Очереди могут быть разной длины. Все грибочки совершенно одинаковы.)

5. Из натурального числа n разрешается получить либо число $n^2 + 2n$, либо число $n^3 + 3n^2 + 3n$. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа, совместимые с числом 2018.

$\boxed{2019^{2^k \cdot 3^m} - 1 \text{ для } k, m = 0, 1, 2, \ldots}$

6. В пространстве даны 5 точек, таких что в проекциях на координатные плоскости никакие три точки не лежат на одной прямой. Могло ли оказаться так, что каждая точка ровно в одной из этих проекций лежит внутри выпуклой оболочки остальных? (Мы говорим, что точка лежит внутри выпуклой оболочки других точек, если она лежит внутри треугольника с вершинами в некоторых трёх из этих точек.)