Олимпиада «Высшая проба» по математике

10 класс, 2018 год

Все задачи оценивались в 20 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 50 баллов.

1. Найдите наименьшее натуральное число, которое можно получить при подстановке натуральных чисел вместо переменных в следующее выражение:

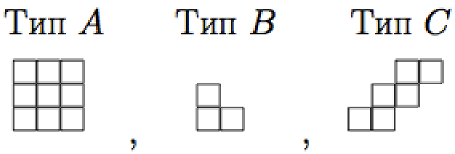
$$13x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 6xz + y.$$

$\boxed{2}$

2. Фонари располагаются на плоскость, освещая все точки угла южнее и западнее себя. (То есть фонарь в точке с координатами (a, b) освещает точки (x, y) с координатами $x \leqslant a$ и $y \leqslant b$.) На плоскость уже выставили 2018 синих фонарей, поместив их в различные точки. Можно ли дорасставить на плоскости 2017 красных фонарей так, что любая точка плоскости, освещённая ровно $k > 0$ синими фонарями, будет освещена ровно $k - 1$ красным фонарём? (Красные фонари можно располагать в точки, занятые другими фонарями, предполагая, что это не мешает освещению.)

3. Треугольник ABC, в котором $AB > AC$, вписан в окружность с центром в точке O. В нём проведены высоты AA' и BB', и BB' повторно пересекает описанную окружность в точке N. Пусть M — середина отрезка AB. Докажите, что если $\angle OBN = \angle NBC$, то прямые AA', ON и MB' пересекаются в одной точке.

4. Прямоугольник 13×9 составлен из трёх типов фигурок:



(сторона клетки равна 1). Какое наименьшее число фигурок типа B может быть при этом использовано? При выкладывании прямоугольника фигурки разрешается как угодно поворачивать и переворачивать.

5. Из натурального числа n разрешается получить либо число $n^2 + 2n$, либо число $n^3 + 3n^2 + 3n$. Два натуральных числа называются совместимыми, если из них можно получить одно и то же число с помощью некоторого количества таких операций. Найдите все числа, совместимые с числом 2018.

$\boxed{2019^{2^k \cdot 3^m} - 1 \text{ для } k, m = 0, 1, 2, \ldots}$

6. На плоскости задан конечный набор равных кругов. Известно, что для любых 4 кругов есть прямая, пересекающая некоторые 3 из них. Докажите, что существует 12 прямых, таких что каждый круг пересекается хотя бы с одной из них.