

Олимпиада «Высшая проба» по математике

9 класс, 2017 год

Все задачи оценивались в 20 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 40 баллов.

1. Каждый член партии доверяет пяти однопартийцам, но никакие двое не доверяют друг другу. При каком минимальном размере партии такое возможно?

Не забудьте показать, что при указанном Вами размере партии это действительно возможно, а при меньших — нет.

2. Найдите все натуральные числа n от 400 до 600 такие, что если перемножить все делители числа n (включая 1 и n), получим число n^5 .

3. У Пети есть линейка длиной 10 см (то есть с помощью неё нельзя проводить отрезки длиной больше 10 см) и циркуль с максимальным раствором 6 см (то есть с помощью него невозможно рисовать окружности радиуса больше 6 см). Делений на линейке и циркуле нет, то есть измерять расстояния ими нельзя.

На листе бумаги нарисованы две точки. Известно, что расстояние между ними равно 17 см. Покажите, как Петя может соединить эти точки отрезком, используя только ту линейку и циркуль, которые у него есть.

В решении достаточно указать правильный способ построения. Доказывать его правильность не обязательно.

4. На доске написано несколько цифр (среди них могут быть одинаковые). На каждом шаге две цифры стираются и пишутся цифры, из которых состоит их произведение. (Например, вместо 5 и 6 пишется 3 и 0, а вместо 2 и 4 пишется 8). Докажите, что через несколько шагов на доске останется одна цифра.

5. В треугольнике ABC $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$. Вписанная окружность касается стороны AB в точке P , а стороны AC — в точке Q ; M — середина стороны AC . Докажите, что $PM = PQ$.

6. Последовательность $\{a_n\}$ определена следующим образом:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Докажите неравенства

$$0, \underbrace{99 \dots 9}_{2017} < \sum_{i=1}^{2017} \frac{1}{a_i} < 1.$$