

Олимпиада «Высшая проба» по математике

10 класс, 2017 год

Все задачи оценивались в 20 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 40 баллов.

1. В компании из 6 человек некоторые компаниями по трое ходили вместе в походы. Верно ли, что среди них найдутся четверо, среди которых каждые трое ходили вместе в поход, либо четверо, где никакие трое не ходили вместе в поход?

2. Парабола $x = y^2$ пересекается с некоторой окружностью в четырёх точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на некоторой параболе, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, или на паре параллельных прямых.

3. Тройка целых чисел (x, y, z) , наибольший общий делитель которых равен 1, является решением уравнения

$$y^2z + yz^2 = x^3 + x^2z - 2xz^2.$$

Докажите, что z является кубом целого числа.

4. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ расположены четыре окружности одного радиуса так, что они имеют общую точку и каждая из них вписана в один из углов четырёхугольника. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

5. Числа P_1, \dots, P_n являются перестановкой чисел $\{1, \dots, n\}$ (то есть каждое P_i равно одному из $1, \dots, n$ и все P_i различны). Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_i + P_{i+1}} > \frac{n-1}{n+2}.$$

6. Сторона BC правильного треугольника ABC разделена на 2016 равных частей точками A_1, \dots, A_{2015} , стороны AC и AB — точками B_1, \dots, B_{2015} и C_1, \dots, C_{2015} . Треугольник $A_iB_jC_k$ называется красным, если содержит центр ABC , и синим иначе. Каких треугольников больше: красных или синих?