Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2015 год

Все задачи оценивались в 20 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 55 баллов.

1. Действительные числа x, y, z выбираются так, что выполняются равенства $xy+yz+zx=4$, $xyz=6$. Доказать, что при любом таком выборе значение выражения

$$\left(xy-\frac{3}{2}(x+y)\right)\left(yz-\frac{3}{2}(y+z)\right)\left(zx-\frac{3}{2}(z+x)\right)$$

является одним и тем же числом, и найти это число.

$\frac{81}{4}$

2. В стране Лимпопо есть четыре национальные валюты: бананы (Б), кокосы (К), еноты ($\mathcal{E}$) и доллары ($). Ниже приведены курсы обмена этих валют (одинаковые во всех обменных пунктах страны):

$$\text{Б} \underset{\frac{1}{2}}{\overset{2}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{6}}{\overset{6}{\rightleftarrows}} \text{Б} \qquad \mathcal{E} \underset{\frac{1}{11}}{\overset{11}{\rightleftarrows}} \text{К} \qquad \$ \underset{\frac{1}{15}}{\overset{10}{\rightleftarrows}} \text{К}$$

Число на стрелке показывает, сколько единиц, указанных в конце стрелки, можно получить за единицу, указанную в начале стрелки. Например одного енота можно обменять на 6 бананов или на 11 кокосов, один доллар на 10 кокосов а один кокос — на $1/15$ доллара. (При решении задачи любую валюту можно дробить на сколь угодно мелкие части: например обменять $101/43$ енота на $606/43$ банана). Обмены $\$ \rightleftarrows \mathcal{E}$ и $\$ \rightleftarrows$ Б в Лимпопо запрещены.

Перевозить деньги через границу Лимпопо можно только в долларах. Дядя Вася приехал в Лимпопо, имея при себе 100 долларов. Он может выполнять указанные выше операции обмена валют неограниченное количество раз, но не имеет никаких других источников дохода. Может ли он разбогатеть и увезти из Лимпопо 200 долларов? Если да — объясните, как. Если нет, докажите.

Может

3. Даны три точки A, B, C, образующие треугольник с углами 30°, 45°, 105°. Выбираются две из этих точек, и проводится серединный перпендикуляр к отрезку, их соединяющему, после чего третья точка отражается относительно этого серединного перпендикуляра. Получаем четвёртую точку D. С получившимся набором из 4 точек осуществляется та же процедура — выбираются две точки, проводится серединный перпендикуляр и все точки отражаются относительно него. Какое наибольшее количество *различных* точек можно получить в результате многократного повторения этой процедуры?

12

4. Приведите пример функции $f(x)$, для которой выполняются все три перечисленных ниже условия:

- область определения функции $f(x)$ — множество всех дейстительных чисел $\mathbb{R}$;
- при любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = b$ имеет ровно одно решение;
- при любом $a > 0$ и любом $b \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x) = ax + b$ имеет не менее двух решений.

$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0;\ f(0) = 0}$

5. Обозначим через T_k произведение первых k нечётных простых чисел: $T_1 = 3$, $T_2 = 3 \cdot 5$, $T_6 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$ и т. д. Для каждого натурального k найти количество натуральных чисел n таких, что число $n^2 + T_k n$ является точным квадратом натурального числа. Решить задачу: а) для $k = 1$; б) для $k = 2$; в) для произвольного заданного натурального k.

$\boxed{\text{в) } \frac{3^k - 1}{2}}$

6. В пространстве даны 270 шаров равных радиусов, любые два из которых пересекаются. Докажите, что среди них можно выбрать 10 шаров так, что найдётся точка, принадлежащая всем выбранным шарам.