Олимпиада «Высшая проба» по математике

10 класс, 2014 год

Все задачи оценивались в 20 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 50 баллов.

1. Могут ли ненулевые числа x, y и z удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 - y, \\ y^2 + y = z^2 - z, \\ z^2 + z = x^2 - x\,? \end{cases}$$

2. Действительные числа a, b и c таковы, что числа ab, bc, ca — рациональные. Докажите, что существуют такие целые числа x, y, z, не равные одновременно нулю, что $ax + by + cz = 0$.

3. На координатной плоскости нарисовано множество точек, заданное уравнением $x = y^2$. Окружность радиуса 5 с центром в точке $(11, 1)$ пересекает это множество в точках A, B, C и D. Докажите, что все точки A, B, C, D лежат на одной параболе, т. е. на кривой, задаваемой уравнением $y = ax^2 + bx + c$, и найдите уравнение этой параболы.

4. Точка O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая AO пересекает сторону BC в точке P. Точки E и F на сторонах AB и AC соответственно выбираются так, что около четырёхугольника $AEPF$ можно описать окружность. Докажите, что длина проекции отрезка EF на сторону BC не зависит от выбора точек E и F.

5. На плоскости даны восемь различных точек. Нумерацию этих точек числами от 1 до 8 назовём *хорошей*, если выполнено следующее условие:

существует такая прямая, что все точки лежат по одну сторону и на разных расстояниях от неё, и при этом расстояния от точек до этой прямой возрастают с возрастанием номера. Т. е. ближайшая точка — номер 1, следующая по удалённости — номер 2, и т. д.

Какое максимальное количество различных хороших нумераций может быть у заданной восьмёрки точек?

6. Пусть $p > 2$ — целое число, не делящееся на 3. Докажите, что существуют такие целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, что

$$-\frac{p}{2} < a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \frac{p}{2}$$

и произведение

$$\frac{p - a_1}{|a_1|} \cdot \frac{p - a_2}{|a_2|} \cdot \ldots \cdot \frac{p - a_k}{|a_k|}$$

равно 3^m для некоторого натурального m.

Ответы

1. Нет.

2.

3. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{97}{2}$.

4.

5. $2C_8^2 = 56$.

6.