Олимпиада «Высшая проба» по математике

9 класс, 2013 год

Все задачи, кроме четвёртой, оценивались в 17 баллов; четвёртая задача — 15 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 28 баллов.

1. Дан квадрат с длиной стороны 9. Разбейте его на девять неперекрывающихся прямоугольников с целочисленными сторонами, параллельными сторонам квадрата, так, чтобы площади этих девяти прямоугольников были попарно различны.

2. Можно ли разрезать круг на части таким образом, чтобы а) центр круга находился на границе каждой из частей и б) из некоторых частей, полученных в результате разрезания, можно было составить вписанный в этот круг правильный шестиугольник? Если можно, то опишите разрезание и укажите, как составить шестиугольник из полученных частей; если нет, то докажите, что нельзя.

3. Триномом степени p называется функция вида $f(x) = x^p + ax^q + 1$, где p, q — натуральные числа, $q < p$, и a — произвольное вещественное число (быть может, равное нулю). Найдите все разложения многочлена $x^{12} + 1$ в произведение пары триномов.

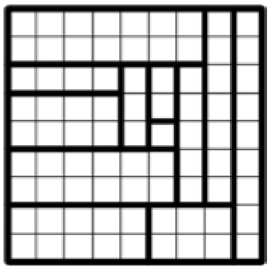
4. Вдоль берега круглого озера периметром 1 км плывут два лосося; один — с постоянной скоростью 500 м/мин по часовой стрелке, другой — с постоянной скоростью 750 м/мин против часовой стрелки. По краю берега мечется медведь, всегда бегущий вдоль берега со скоростью 200 м/мин в направлении ближайшего к нему лосося. Сколько полных оборотов вокруг озера сделает медведь за один час?

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. На стороне AB выбрана точка P так, что окружность, описанная вокруг треугольника PA_1B_1, касается стороны AB. Найдите PC_1, если $PA = 30$ и $PB = 10$.

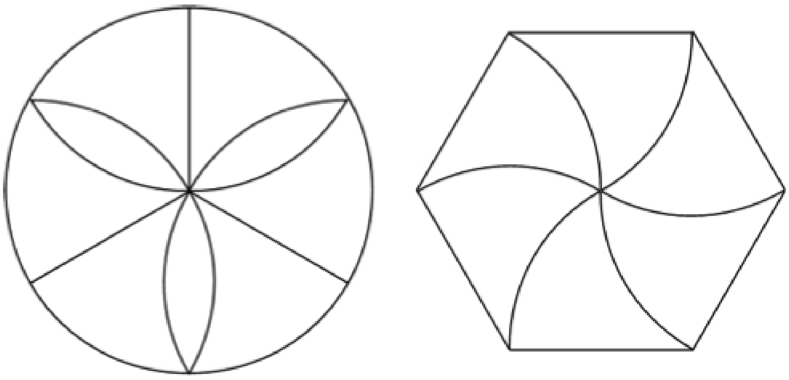
6. Двое играют в следующую игру. У них есть плитка шоколада, разделённая бороздками, параллельными сторонам плитки, на дольки. Борозки разбивают плитку на M вертикальных и N горизонтальных полосок. Первый игрок своим ходом ломает плитку вдоль одной из бороздок на две прямоугольные части и отдаёт их второму. Второй игрок выбирает одну из частей, съедает её, а другую ломает по бороздке и отдаёт получившиеся две части первому. Первый игрок съедает одну из полученных частей, а другую ломает и отдаёт, и всё повторяется. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. При каких M и N первый игрок может играть так, чтобы выиграть вне зависимости от действий второго игрока?

Ответы

1.



2.



3. $(x^4+1)(x^8-x^4+1)$, $\left(x^6-\sqrt{2}x^3+1\right)\left(x^6+\sqrt{2}x^3+1\right)$.

4. 7.

5. 6.

6. Максимальная степень двойки, на которую делится M, не равна максимальной степени двойки, на которую делится N.