Олимпиада «Высшая проба» по математике

8 класс, 2013 год

Первая и вторая задачи оценивались в 16 баллов, остальные — в 17 баллов. Для получения диплома нужно было набрать от 28 баллов.

1. Дан прямоугольник с длинами сторон 5 и 6. Разбейте его на семь неперекрывающихся прямоугольников с целочисленными сторонами, параллельными сторонам исходного прямоугольника, так, чтобы площади этих семи прямоугольников были попарно различны.

2. Докажите, что число

$$10^{10^{10^{2013}}} + 10^{10^{2013}} + 10^{2013} - 1$$

не простое.

3. Можно ли разрезать круг на части таким образом, чтобы а) центр круга находился на границе каждой из частей и б) из некоторых частей, полученных в результате разрезания, можно было составить вписанный в этот круг правильный шестиугольник? Если можно, то опишите разрезание и укажите, как составить шестиугольник из полученных частей; если нет, то докажите, что нельзя.

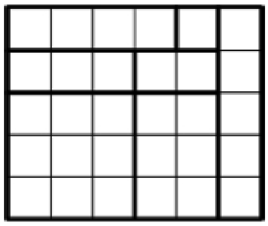
4. Найдите все целочисленные решения (x, y) уравнения $2x^2 - y^2 = 2^{x+y}$ и докажите, что других нет.

5. Сколько существует различных (т. е. не равных друг другу) остроугольных треугольников с целыми длинами сторон и периметром 24? Выпишите длины трёх сторон всех этих треугольников и докажите, что других не бывает.

6. Верхняя полуплоскость разбита на квадратные клетки. Костяшка домино занимает две соседние по стороне клетки. Можно ли заполнить некоторые из клеток неперекрывающимися костяшками домино так, чтобы в каждой строке и каждом столбце оказалось заполненным нечётное число клеток? Если можно, то опишите конфигурацию; если нет, то докажите, что нельзя.

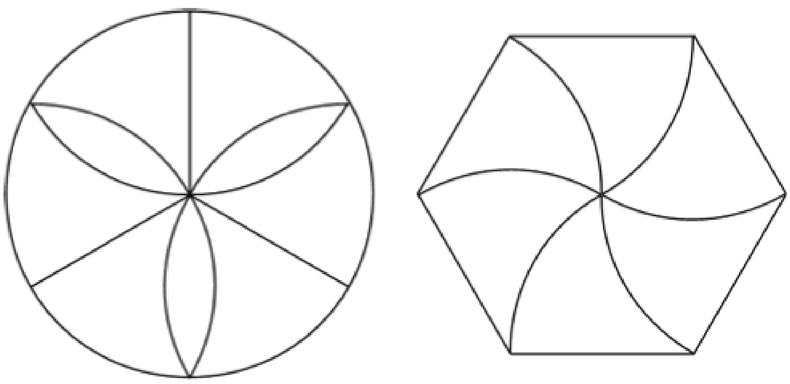
Ответы

1.



2. Делится на 11.

3.



4. $(1, 0)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-3, 4)$.

5. 6.

6. Можно.