Олимпиада «Высшая проба» по математике

11 класс, 2012 год

Задачи 1–4 оценивались в 20 баллов, задача 5 — в 16 баллов, задача 6 — в 24 балла. Для получения диплома нужно было набрать от 30 баллов.

1. Найдите все пары взаимно простых натуральных чисел a и b такие, что $2a^2+3b^2$ делится на $2a+3b$.

2. Найдите максимальное число частей, на которые могут разбить плоскость графики десяти квадратичных функций $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$.

3. При каком значении параметра a график многочлена $x^4-6x^3+12x^2+ax$ симметричен относительно прямой $x=c$ для какого-нибудь значения константы c?

4. В пространстве выбраны четыре точки, все координаты каждой из которых делятся на 3, причём эти точки не лежат в одной плоскости. Какое минимальное число точек, все координаты которых чётны, может содержаться в тетраэдре, вершинами которого являются выбранные четыре точки? (Содержаться — значит лежать внутри, на грани, на ребре или в вершине.)

5. Описанный четырёхугольник $ABCD$ делится диагональю AC на два подобных, но не равных треугольника. Чему может быть равна длина диагонали AC, если длины сторон AB и CD равны 5 и 10 соответственно?

6. В одной из вершин правильного $2n$-угольника ($n\geqslant 2$) поставлено число 1. Для данной расстановки чисел $2, 3, \ldots, 2n$ в остальные вершины $2n$-угольника поставим на каждой его стороне знак $+$, если число на конце стороны (при движении по часовой стрелке) больше числа на её начале, и знак $-$, если оно меньше. Докажите, что модуль разности между числом расстановок чисел $2, 3, \ldots, 2n$ с чётным количеством плюсов на сторонах и числом расстановок с нечётным количеством плюсов равен числу расстановок, в которых плюсы и минусы чередуются, при (а) $n=3$; (б) $n=4$; (в) произвольном n.

Ответы

1. $(1, 1)$, $(6, 1)$, $(3, 8)$, $(9, 4)$

2. 101.

3. $a = -9$.

4. Одна.

5. $5\sqrt{2}$ или 6.