Олимпиада «Высшая проба» по математике

9 класс, 2011 год

В 2011 году олимпиада называлась Межрегиональной олимпиадой ГУ-ВШЭ.

1. Числа от 1 до 2011 выписаны в ряд в порядке возрастания. Можно ли между ними расставить знаки + и − так, чтобы значение полученного выражения было полным квадратом?

2. Существует ли квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ такой, что $f(0) = 2011$, $f(2011) = 0$, а значения во всех натуральных степенях двойки делятся на 3? (Т. е. $f(2^n)$ делится на 3 при каждом натуральном n.)

3. Дан остроугольный треугольник на плоскости. В нём проводится высота. В одном из получившихся треугольников снова проводится высота. Такая операция повторяется 2011 раз: каждый раз проводится высота в каком-нибудь из образовавшихся при предыдущих построениях треугольников. Рассмотрим все прямые, содержащие проведённые высоты. Докажите, что на плоскости можно расположить угол в 30 градусов, не имеющий общих точек ни с одной из этих прямых.

4. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 4$, $DA = 3$. Продолжения сторон AB и CD за точки B и C соответственно пересекаются в точке E. Продолжения сторон AD и BC за точки A и B соответственно пересекаются в точке F. Найдите $AF - BF + BE - CE$.

5. Натуральные числа p и q таковы, что $\frac{p}{q} < \sqrt{11}$. Всегда ли верно, что

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{3pq} < \sqrt{11}\,?$$

6. В классе 20 учеников, каждый из которых дружит ровно с шестью одноклассниками. Найдите число таких различных компаний из трёх учеников, что в них либо все школьники дружат друг с другом, либо каждый не дружит ни с одним из двух оставшихся.

Ответы

1. Можно.

2. Существует.

3.

4. 1.

5. Всегда верно.

6. 360.