Олимпиада «Высшая проба» по математике

10 класс, 2011 год

В 2011 году олимпиада называлась Межрегиональной олимпиадой ГУ-ВШЭ.

1. Числа от 1 до 2011 выписаны в ряд в порядке возрастания. Можно ли между ними расставить знаки + и − так, чтобы значение полученного выражения было полным квадратом?

2. Существует ли квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ такой, что $f(0) = 2011$, $f(2011) = 0$, а значения во всех натуральных степенях двойки делятся на 3? (Т. е. $f(2^n)$ делится на 3 при каждом натуральном n.)

3. Дан остроугольный треугольник на плоскости. В нём проводится высота. В одном из получившихся треугольников снова проводится высота. Такая операция повторяется 2011 раз: каждый раз проводится высота в каком-нибудь из образовавшихся при предыдущих построениях треугольников. Рассмотрим все прямые, содержащие проведённые высоты. Докажите, что на плоскости можно расположить угол в 30 градусов, не имеющий общих точек ни с одной из этих прямых.

4. На плоскости заданы непересекающиеся квадрат со стороной 2 и круг радиуса 3. Найдите максимальное расстояние между серединами отрезков AB и CD, таких, что точки A и C лежат в квадрате, а точки B и D лежат в круге.

5. Натуральные числа p и q таковы, что $\frac{p}{q} < \sqrt{13}$. Всегда ли верно, что

$$\frac{p}{q} + \frac{1}{3pq} < \sqrt{13}\,?$$

6. Две армии А и Б, состоящие соответственно из 800 и 1000 воинов, встретились на поле битвы и договорились воевать «по-рыцарски». Каждому воину даётся одна смертельно ядовитая стрела (задетый стрелой мгновенно умирает), и они выстреливают по договору: сначала некоторая часть армии А, потом некоторая часть армии Б, потом ещё раз часть армии А, потом ещё раз часть Б, и всё. Какое минимальное число воинов может остаться в живых?

Ответы

1. Можно.

2. Существует.

3.

4. $3+\sqrt{2}$.

5. Всегда верно.

6. 400.