Московская устная математическая олимпиада

7 класс, 2018 год

Первый тур

1. Объём бутылки кваса — 1,5 литра. Первый выпил половину бутылки, второй – треть того, что осталось после первого, третий — четверть оставшегося от предыдущих, и так далее, четырнадцатый — пятнадцатую часть оставшегося. Сколько кваса осталось в бутылке?

0,1 л

2. Можно ли внутри выпуклого пятиугольника отметить 18 точек так, чтобы внутри каждого из десяти треугольников, образованных его вершинами, отмеченных точек было поровну?

3. Трём мудрецам показали 9 карт: шестёрку, семёрку, восьмёрку, девятку, десятку, валета, даму, короля и туза (карты перечислены по возрастанию их достоинства). После этого карты перемешали и каждому раздали по три карты. Каждый мудрец видит только свои карты. Первый сказал: «Моя старшая карта — валет». Тогда второй ответил: «Я знаю, какие карты у каждого из вас». У кого из мудрецов был туз?

Второй тур

4. Дан прямоугольный параллелепипед, у которого все измерения (длина, ширина и высота) — целые числа. Известно, что если длину и ширину увеличить на 1, а высоту уменьшить на 2, то объём параллелепипеда не изменится. Докажите, что какое-то из измерений данного параллелепипеда кратно трём.

5. Можно ли разрезать равносторонний треугольник на три равных девятиугольника?

6. На острове рыцарей и лжецов каждый дружит с десятью другими жителями (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый житель острова заявил, что среди его друзей больше лжецов, чем рыцарей. Может ли количество рыцарей быть вдвое больше, чем количество лжецов?

Третий тур

7. Цена стандартного обеда в таверне «Буратино» зависит только от дня недели. Аня обедала 10 дней подряд, начиная с 10 июля, и заплатила 70 сольдо. Ваня также заплатил 70 сольдо за 12 обедов, начиная с 12 июля. Таня заплатила 100 сольдо за 20 обедов, начиная с 20 июля. Сколько заплатит Саня за 24 обеда, начиная с 24 июля?

150 сольдо

8. Точка M — середина стороны BC треугольника ABC. Из вершины C опущен перпендикуляр CL на прямую AM (L лежит между A и M). На отрезке AM отмечена точка K так, что $AK = 2LM$. Докажите, что $\angle BKM = \angle CAM$.

9. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить натуральные числа так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 2 или в два раза, были покрашены в разные цвета?