Московская устная математическая олимпиада

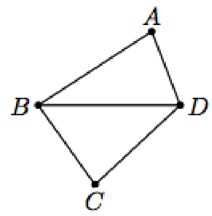
7 класс, 2012 год

Первый тур

Каждая задача первого тура оценивается в 7 баллов.

1. Записаны шесть положительных несократимых дробей, сумма числителей которых равна сумме их знаменателей. Паша перевёл каждую из неправильных дробей в смешанное число. Обязательно ли найдутся два числа, у которых одинаковы либо целые части, либо дробные части?

2. На карте обозначены 4 деревни: A, B, C и D, соединённые тропинками (см. рисунок). В справочнике указано, что на маршрутах $A-B-C$ и $B-C-D$ есть по 10 колдобин, на маршруте $A-B-D$ колдобин 22, а на маршруте $A-D-B$ колдобин 45. Туристы хотят добраться из A в D так, чтобы на их пути было как можно меньше колдобин. По какому маршруту им надо двигаться?



3. Четверо детей сказали друг о друге так.

Маша: Задачу решили трое: Саша, Наташа и Гриша.
Саша: Задачу не решили трое: Маша, Наташа и Гриша.
Наташа: Маша и Саша солгали.
Гриша: Маша, Саша и Наташа сказали правду.

Сколько детей на самом деле сказали правду?

Второй тур

Каждая задача второго тура оценивается в 10 баллов.

4. Назовём натуральные числа a и b *друзьями*, если их произведение является точным квадратом. Докажите, что если a — друг b, то a — друг НОД(a, b).

5. В треугольнике ABC биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке M, а биссектриса угла A пересекает отрезок CM в точке T. Оказалось, что отрезки CM и AT разбили треугольник ABC на три равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

6. В каждой клетке таблицы 10×10 записано число. В каждой строке подчеркнули наибольшее число (или одно из наибольших, если их несколько), а в каждом столбце — наименьшее (или одно из наименьших). Оказалось, что все подчёркнутые числа подчёркнуты ровно два раза. Докажите, что все числа, записанные в таблице, между собой равны.

Третий тур

Каждая задача третьего тура оценивается в 13 баллов.

7. На складах двух магазинов хранится пшено: на первом складе на 16 тонн больше, чем на втором. Каждую ночь ровно в полночь владелец каждого магазина ворует у своего конкурента четверть имеющегося на его складе пшена и перетаскивает на свой склад. Через 10 ночей воришек поймали. На каком складе в момент их поимки было больше пшена и на сколько?

8. Через точку Y на стороне AB равностороннего треугольника ABC проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке Z, а продолжение стороны CA за точку A — в точке X. Известно, что $XY = YZ$ и $AY = BZ$. Докажите, что прямые XZ и BC перпендикулярны.

9. Клетки доски размером 5×5 раскрашены в шахматном порядке (угловые клетки — чёрные). По чёрным клеткам этой доски двигается фигура — мини-слон, оставляя след на каждой клетке, где он побывал, и больше в эту клетку не возвращаясь. Мини-слон может ходить либо в свободные от следов соседние (по диагонали) клетки, либо прыгать (также по диагонали) через одну клетку, в которой оставлен след, на свободную клетку за ней. Какое наибольшее количество клеток сможет посетить мини-слон?