Московская устная математическая олимпиада

7 класс, 2006 год

Первый тур

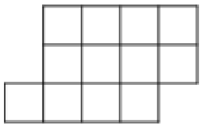
Каждая задача первого тура оценивается в 5 баллов.

1. Найдите все решения ребуса и докажите, что других нет:

$$\mathtt{AP}^{\mathtt{A}} = \mathtt{PAT}.$$

(Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные.)

2. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две одинаковые части тремя способами (резать можно только по линиям сетки).



3. В XIX и XX веках Россией правили 6 царей из династии Романовых. Вот их имена и отчества по алфавиту: Александр Александрович, Александр Николаевич, Александр Павлович, Николай Александрович, Николай Павлович и Павел Петрович. Один раз после брата правил брат, во всех остальных случаях — после отца сын. Как известно, последнего русского царя звали Николаем. Восстановите порядок правления царей. *К сожалению, жюри упорно делает вид, что не знает русской истории, и не верит ничему кроме логических рассуждений.*

Второй тур

Каждая задача второго тура оценивается в 10 баллов.

4. На площади репетировал военный оркестр. Для исполнения гимна музыканты выстроились квадратом, а для исполнения лирической песни — перестроились в прямоугольник. При этом количество шеренг увеличилось на пять. Сколько музыкантов в оркестре?

5. На бесконечном листе клетчатой бумаги x клеток покрашены в чёрный цвет. Каждую секунду все белые клетки, у которых хотя бы три соседа из четырёх чёрные, становятся чёрными, а все клетки, у которых хотя бы три соседа из четырёх белые, становятся белыми. Остальные клетки не меняются. Может ли через несколько секунд случиться так, что на листе бумаги окажется ровно $\frac{3}{2}x$ чёрных клеток?

6. На спортивном празднике ученики седьмых классов парами соревновались в беге по следующим правилам. По команде два человека начинают бежать с места старта в разные стороны по круговой дорожке стадиона. Финишем считается момент их встречи. Саша и Юра пробежали круг за 45 секунд. Две Алёны начали бежать с постоянными скоростями (не обязательно равными), но, когда им оставалось пробежать полкруга, одна Алёна увеличила скорость на 25%, а другая — на 28%. Оказалось, что первые полкруга они бежали на 5 секунд больше, чем вторые полкруга. У кого лучше результат: у девочек или у мальчиков?

Третий тур

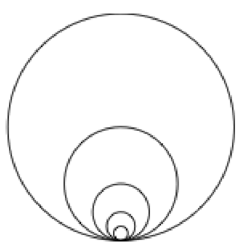
Каждая задача третьего тура оценивается в 15 баллов.

7. Для игры в классики на земле нарисован ряд клеток, в которые вписаны по порядку числа от 1 до 10 (см. рисунок). Маша прыгнула снаружи в клетку 1, затем попрыгала по остальным клеткам (каждый прыжок — на соседнюю по стороне клетку) и выпрыгнула наружу из клетки 10. Известно, что на клетке 1 Маша была один раз, на клетке 2 — два раза, …, на клетке 9 — девять раз. Сколько раз побывала Маша на клетке 10?

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10

8. Лабиринт состоит из пяти окружностей (см. рисунок). Длины окружностей равны 10, 20, 40, 80 и 160 метров. По лабиринту с постоянной скоростью начинает ходить человек, который обходит все его окружности по часовой стрелке в порядке возрастания их длин.

Пройдя самую большую окружность, он переходит на самую маленькую и начинает всё сначала. Через некоторое время по лабиринту начинает ходить ещё один человек, который ходит с той же скоростью и по тому же плану, что и первый, но обходит окружности против часовой стрелки. Докажите, что эти два человека обязательно встретятся.



9. По кругу лежат 13 старинных монет различного веса. За одно взвешивание можно узнать вес одной монеты. Объясните, как за шесть взвешиваний найти монету, которая тяжелее двух своих соседей.