Межреспубликанская олимпиада школьников по математике

11 класс, 1992 год

Первый день

1. [*6 баллов*] Найдите все нули функции

$$f(x) = a\cos(x+1) + b\cos(x+2) + c\cos(x+3),$$

если коэффициенты a, b, c подобраны так, что на интервале $(0;\pi)$ этих нулей имеется по крайней мере два.

2. [*6 баллов*] Дана плоскость, пересекающая сферу с центром O по окружности. На сфере по разные стороны от плоскости взяты точки A и B, причём радиус OA перпендикулярен данной плоскости. Через прямую AB проведена произвольная плоскость, пересекающая окружность в точках X и Y. Докажите, что произведение $BX \cdot BY$ не зависит от выбора такой плоскости.

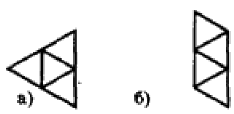
3. [*10 баллов*] Имеется прибор, позволяющий находить все действительные корни любого кубического многочлена $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$. Придумайте, как с помощью этого прибора решить систему

$$\begin{cases} x = P(y), \\ y = P(x). \end{cases}$$

4. [*8 баллов*] Найдите все натуральные числа $k > 1$, удовлетворяющие условию: для некоторых натуральных m и n, $m \neq n$, числа $k^m + 1$ и $k^n + 1$ получаются друг из друга перестановкой в обратном порядке цифр десятичной записи этих чисел.

Второй день

5. [*6 баллов*] Правильный треугольник со стороной 10 разбит прямыми, параллельными сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Имеется m треугольных плиток (рис. *а*) и $25 - m$ четырёхугольных (рис. *б*).



а) Можно ли замостить ими весь исходный треугольник, если $m = 10$?

б) Найдите все значения m, при которых это возможно.

6. [*8 баллов*] На плоскости нарисованы 1992 вектора. Два игрока по очереди выбирают по одному вектору до тех пор, пока они не кончатся. Проигрывает тот, у кого сумма выбранных им векторов имеет меньшую длину. Может ли начинающий построить свою игру так, чтобы не проиграть?

7. [*7 баллов*] Докажите, что если натуральные числа k, l, m, n удовлетворяют условиям

$$k < l < m < n, \quad kn = lm,$$

то справедливо неравенство

$$\left(\frac{n-k}{2}\right)^2 \geqslant k+2.$$

8. [*10 баллов*] Докажите, что в компании из 17 человек, в которой каждый знаком ровно с четырьмя другими, найдутся двое, не имеющие общих знакомых и не знакомые друг с другом.