Всесоюзная олимпиада школьников по математике

11 класс, 1991 год

Первый день

1. [*5 баллов*] По заданному натуральному числу a_0 строят числа a_n последовательно при $n = 1, 2, \ldots$ по следующему правилу: если последняя цифра числа a_{n-1} не превосходит 5, то она отбрасывается, и получается число a_n (возможно, в результате ничего не останется — тогда построение заканчивается), в противном случае — $a_n = 9a_{n-1}$. Может ли последовательность (a_n) оказаться бесконечной?

2. [*6 баллов*] Числа α и β удовлетворяют равенствам

$$\begin{cases} \alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha = 1, \\ \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta = 5. \end{cases}$$

Найдите $\alpha + \beta$.

3. [*7 баллов*] На сфере выбраны точки A, B, C, D и E так, что отрезки AB и CD пересекаются в точке F, а точки A, C и F равноудалены от точки E. Докажите, что прямые BD и EF перпендикулярны.

4. Существует ли на плоскости

а) [*5 баллов*] набор из четырёх попарно неколлинеарных векторов, в котором сумма любых двух векторов перпендикулярна сумме двух других;

б) [*7 баллов*] набор из 91 ненулевого вектора, в котором сумма любых 19 векторов перпендикулярна сумме остальных?

Второй день

5. [*5 баллов*] На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ взяты точки K и N соответственно так, что $AK \cdot AN = 2BK \cdot DN$. Отрезки CK и CN пересекают диагональ BD в точках L и M. Докажите, что точки K, L, M, N и A лежат на одной окружности.

6. [*9 баллов*] На Марсе 100 государств, враждующих между собой. Для поддержания мира решено образовать несколько военных блоков так, чтобы в каждом блоке было не более 50 государств и любые два государства состояли вместе хотя бы в одном блоке.

а) Каким наименьшим числом блоков можно обойтись?

б) Тот же вопрос при дополнительном требовании, чтобы в любые два блока входило в общей сложности не более 80 государств.

7. [*8 баллов*] Даны $2n$ различных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$. Таблица $n \times n$ заполнена по следующему правилу: в клетке, расположенной на пересечении i-й строки и j-го столбца, записано число $a_i + b_j$. Докажите, что если во всех столбцах произведения чисел одинаковы, то во всех строках — тоже.

8. [*8 баллов*] Какое наибольшее значение может принимать выражение

$$|y_1 - y_2| + \ldots + |y_{1990} - y_{1991}|$$

если

$$y_k = \frac{x_1 + \ldots + x_k}{k}$$

при $k = 1, \ldots, 1991$, а числа $x_1, \ldots, x_{1991}$ удовлетворяют условию

$$|x_1 - x_2| + \ldots + |x_{1990} - x_{1991}| = 1991\,?$$