

Всесоюзная олимпиада школьников по математике

10 класс, 1989 год

Первый день

1. [5 баллов] При каком наименьшем натуральном n уравнение

$$\left[\frac{10^n}{x} \right] = 1989$$

имеет целое решение? Через $[a]$ обозначена целая часть числа a , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее a .

2. [7 баллов] На сторонах AB , BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки D , E и F так, что $DE = BE$ и $FE = CE$. Докажите, что центр описанной около треугольника ADF окружности лежит на биссектрисе угла DEF .

3. [9 баллов] На одной из двух данных пересекающихся сфер взяты точки A и B , на другой — точки C и D . Отрезок AC проходит через общую точку сфер. Отрезок BD проходит через другую общую точку сфер и параллелен прямой, содержащей центры сфер. Докажите, что проекции отрезков AB и CD на прямую AC равны.

4. [9 баллов] Два туриста находятся на одинаковой высоте (над уровнем моря) в точках A и B , расположенных по разные стороны от горной цепи. Путь по перевалу, соединяющий точки A и B , имеет форму ломаной, все вершины которой находятся выше её концов A и B . Могут ли оба туриста пройти через весь перевал, оставаясь в любой момент времени на одинаковой высоте?

Второй день

5. [5 баллов] Найдите наименьшее значение выражения $(x+y)(x+z)$ при условии, что x, y, z — положительные числа, удовлетворяющие равенству $xyz(x+y+z) = 1$.

6. [7 баллов] Дан многогранник с чётным числом рёбер. Докажите, что на всех рёбрах можно так расставить стрелки, чтобы в каждую вершину этого многогранника входило чётное число стрелок.

7. [8 баллов] Существует ли функция $f(n)$, отображающая множество натуральных чисел в себя и удовлетворяющая при каждом натуральном $n > 1$ равенству

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1))?$$

8. [10 баллов] Дан выпуклый многоугольник. Длина любого отрезка, соединяющего вершину этого многоугольника с некоторой точкой его границы и делящего его площадь пополам, не превосходит 1. Докажите, что площадь многоугольника меньше $\pi/4$.