Всесоюзная олимпиада школьников по математике

10 класс, 1988 год

Первый день

1. [*5 баллов*] В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG. Докажите, что $EF = DG$.

2. [*8 баллов*] Найдите наименьшее значение выражения

$$S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$$

при условии, что x, y, z — положительные числа, сумма квадратов которых равна единице.

3. [*7 баллов*] Ломаная, все вершины которой лежат на поверхности куба с ребром 2 и каждое звено которой равно 3, соединяет две наиболее удалённые вершины куба. Какое наименьшее число звеньев может иметь такая ломаная?

4. [*10 баллов*] Пусть n, m, k — натуральные числа, $m \geqslant n$. Докажите, что если

$$1 + 2 + \ldots + n = mk,$$

то числа 1, 2, $\ldots$, n можно разбить на k групп так, чтобы суммы чисел в каждой группе были равны m.

Второй день

5. [*6 баллов*] Незамкнутая ломаная с конечным числом звеньев вписана в параболу так, что начало её совпадает с вершиной параболы и любые два звена, образующие вершину ломаной, составляют равные углы с касательной к параболе в этой вершине. Докажите, что такая ломаная расположена по одну сторону от оси параболы.

6. [*7 баллов*] При каком наименьшем значении n система

$$\begin{cases} \sin x_1 + \sin x_2 + \ldots + \sin x_n = 0, \\ \sin x_1 + 2\sin x_2 + \ldots + n\sin x_n = 100 \end{cases}$$

имеет решение?

7. [*9 баллов*] Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношениями

$$a_0 = 0,\ a_n = P(a_{n-1}),\ n = 1, 2, \ldots,$$

где $P(x)$ — многочлен с натуральными коэффициентами. Докажите, что для любых натуральных чисел m и k с наибольшим общим делителем d наибольший общий делитель чисел a_m и a_k равен a_d.

8. [*8 баллов*] Докажите, что для любого тетраэдра имеет место неравенство

$$r < \frac{ab}{2(a+b)}\,,$$

где a, b — длины двух скрещивающихся рёбер, а r — радиус вписанного шара.