

Всесоюзная олимпиада школьников по математике

10 класс, 1987 год

Первый день

1. [6 баллов] Найдите такой набор из пяти различных натуральных чисел, в котором любые два числа взаимно просты, а любые несколько чисел дают в сумме составное число.

2. [7 баллов] Докажите, что если в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ имеют место равенства $\angle ABC = \angle ADE$ и $\angle AEC = \angle ADB$, то $\angle BAC = \angle DAE$.

3. [10 баллов] Найдите все значения α , для каждого из которых последовательность

$$\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 4\alpha, \cos 8\alpha, \dots, \cos 2^n \alpha, \dots$$

состоит только из отрицательных чисел.

4. [7 баллов] В квадрате из 1987×1987 клеток вырезана одна произвольная клетка. Докажите, что оставшаяся часть всегда можно разрезать на трёхклеточные «уголки».

Второй день

5. [9 баллов] Два игрока поочерёдно выписывают на доске натуральные числа, не превосходящие p . Правилами игры запрещается писать на доске делители уже выписанных чисел. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

а) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p = 10$, и укажите её.

б) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p = 1000$.

6. [7 баллов] График функции $y = f(x)$, определённой на всей числовой прямой, переходит в себя при повороте на угол $\pi/2$ вокруг начала координат.

а) Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет ровно одно решение.

б) Приведите пример такой функции.

7. [8 баллов] Все грани выпуклого многогранника являются треугольниками. Докажите, что каждое ребро этого многогранника можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы в итоге из любой его вершины в любую другую можно было попасть, двигаясь только по красным рёбрам, а также только по синим.

8. [6 баллов] Докажите, что при любом натуральном значении n справедливо неравенство

$$(2n + 1)^n \geq (2n)^n + (2n - 1)^n.$$