Всесоюзная олимпиада школьников по математике

10 класс, 1986 год

Первый день

1. Найдите все натуральные числа, каждое из которых равно квадрату числа всех своих делителей.

2. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n выполнено неравенство

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\frac{3}{a_1+a_2+a_3}+\ldots+\frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

3. Через вершину A треугольника ABC, в котором $AB\neq AC$, проводятся различные прямые. Докажите, что любая из них может содержать не более одной точки M, отличной от вершин треугольника и удовлетворяющей условию $\angle ABM=\angle ACM$. Определите, какие из рассматриваемых прямых не содержат ни одной такой точки.

4. Куб с ребром длиной n, $n\geqslant 3$, состоит из n^3 единичных кубиков. Докажите, что в каждом из этих кубиков можно записать по целому числу так, чтобы все n^3 чисел были различными, а суммы чисел в любом ряду, параллельном какому-либо ребру куба, равнялись нулю.

Второй день

5. Докажите, что сумма всех чисел вида $\frac{1}{mn}$, где m, n — натуральные числа и $1\leqslant m<n\leqslant 1986$, не является целым числом.

6. Около окружности радиуса 1 описаны квадрат и треугольник. Докажите, что площадь общей части квадрата и треугольника больше 3,4. Можно ли утверждать, что эта площадь больше 3,5?

7. Многочлен $p(x)$ назовём *допустимым*, если все его коэффициенты равны 0, 1, 2 или 3. Для данного натурального n найдите число всех допустимых многочленов, удовлетворяющих условию $p(2)=n$.

8. Рассмотрим все тетраэдры $AXBY$, описанные около данной сферы. Докажите, что при фиксированных точках A и B сумма углов пространственного четырёхугольника $AXBY$, то есть величина

$$\angle AXB+\angle XBY+\angle BYA+\angle YAX,$$

не зависит от выбора точек X и Y.