Всесоюзная олимпиада школьников по математике

10 класс, 1985 год

Первый день

1. [*5 баллов*] Решите неравенство

$$|\sin x - \sin y| + \sin x \cdot \sin y \leqslant 0.$$

2. [*8 баллов*] На плоскости нарисован выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Построим точку A_1, симметричную точке A относительно точки B, точку B_1, симметричную точке B относительно точки C, ..., точку E_1, симметричную точке E относительно точки A, и после этого сотрём пятиугольник $ABCDE$. Докажите, что при помощи циркуля и линейки, зная расположение точек A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, можно восстановить пятиугольник $ABCDE$.

3. [*7 баллов*] Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ задаётся правилами: $a_{2n} = a_n$ при $n \geqslant 1$ и $a_{4n+1} = 1$, $a_{4n+3} = 0$ при $n \geqslant 0$. Докажите, что эта последовательность не имеет периода.

4. [*10 баллов*] На плоскости проведено n прямых ($n > 2$), делящих плоскость на несколько областей. Некоторые из этих областей окрашены, причём никакие две окрашенные области не могут соприкасаться по границе. Докажите, что число окрашенных областей не превосходит $(n^2 + n)/3$.

Второй день

5. [*5 баллов*] Решите уравнение

$$\cfrac{x}{2 + \cfrac{x}{2 + \ldots \cfrac{}{2 + \cfrac{x}{1 + \sqrt{1+x}}}}} = 1$$

(в записи выражения, стоящего слева, фигурирует 1985 двоек).

6. [*7 баллов*] Из правильного пятиугольника со стороной 1 см удалены все точки, отстоящие от всех вершин пятиугольника на расстояние, меньшее 1см. Найдите площадь оставшейся части.

7. [*8 баллов*] На бесконечном клетчатом листе со стороной клетки 1 разрешается делать разрезы только по линиям сетки. Докажите, что при любом целом $m > 12$ можно вырезать прямоугольник площади, большей m, из которого нельзя вырезать прямоугольник площади m.

8. [*10 баллов*] Длины рёбер куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 1 см. Найдите наименьшее расстояние между точками окружностей, одна из которых вписана в основание куба $ABCD$, а вторая проходит через вершины A, C и B_1.