Всесоюзная олимпиада школьников по математике

10 класс, 1984 год

Первый день

1. При каких целых m и n выполняется равенство

$$\left(5+3\sqrt{2}\right)^m=\left(3+5\sqrt{2}\right)^n\,?$$

2. В строку в возрастающем порядке выписали n различных действительных чисел. Под ними во вторую строку выписали те же числа, только, быть может, в другом порядке. Для каждой пары чисел, выписанных одно под другим, вычислили сумму. Эти суммы образовали третью строку. Оказалось, что числа в третьей строке также расположены в возрастающем порядке. Докажите, что первая строка совпадает со второй.

3. Дан треугольник ABC. Через точку P провели прямые PA, PB, PC, которые пересекли описанную около этого треугольника окружность в точках A_1, B_1, C_1, отличных от вершин треугольника. Оказалось при этом, что треугольник $A_1B_1C_1$ конгруэнтен треугольнику ABC. Докажите, что существует не более восьми точек P с указанным свойством.

4. Положительные числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25,\\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=9,\\ z^2+zx+x^2=16. \end{cases}$$

Вычислите величину $xy+2yz+3zx$.

Второй день

5. В клетках квадратной таблицы 3×3 записаны числа 1 или -1. Для каждой клетки таблицы вычислим произведение чисел, стоящих в соседних с ней клетках (соседними называются клетки, имеющие общую сторону). После этого впишем вычисленные произведения в клетки таблицы вместо стоящих там ранее чисел. С новой таблицей проделаем ту же операцию и т. д. Докажите, что после некоторого числа таких операций в таблице будут записаны одни единицы.

6. Какое из чисел больше: $\dfrac{2}{201}$ или $\ln\dfrac{101}{100}$?

7. На плоскости расположены три окружности c_1, c_2, c_3 радиусами r_1, r_2, r_3 соответственно, причём каждая лежит вне двух других. Пусть $r_1 > r_2$, $r_1 > r_3$; пусть A — точка пересечения внешних касательных к окружностям c_1 и c_2 — лежит вне окружности c_3; пусть B — точка пересечения внешних касательных к окружностям c_1 и c_3 — лежит вне окружности c_2. Из точки A проведены касательные к окружности c_3, из точки B — к окружности c_2. Докажите, что эти две пары касательных, пересекаясь, образуют четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Вычислите радиус этой окружности.

8. Докажите, что любое сечение куба плоскостью, проходящей через центр куба, имеет площадь, не меньшую площади грани куба.