Всесоюзная олимпиада школьников по математике

10 класс, 1983 год

Первый день

1. Величины α и β двух острых углов удовлетворяют равенству

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta).$$

Докажите, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

2. Натуральное число K в десятичной записи имеет n знаков. Это число округлили с точностью до десятков, заменив последнюю цифру нулём и увеличив на единицу число десятков, если эта последняя цифра была больше четырёх. Полученное число аналогичным образом округлили с точностью до сотен и так далее. В результате последнего, $(n-1)$-го округления получилось число $\tilde{K}$. Докажите, что $\tilde{K} < \frac{18}{13}K$.

3. Вершины тетраэдра $ABCD$ ортогонально спроектированы на две плоскости. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 — проекции соответствующих вершин. Докажите, что одну из плоскостей можно переместить в пространстве так, чтобы прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 стали параллельными.

4. Школьник упражняется в решении квадратных уравнений. Решив очередное квадратное уравнение и убедившись в том, что у него имеется два корня, он составляет следующее уравнение по правилу: свободный член равен большему корню, коэффициент при переменной x равен меньшему корню, коэффициент при x^2 равен единице. Докажите, что это упражнение не может продолжаться бесконечно долго. Каково наибольшее число уравнений, которое ему, возможно, придётся решить?

Второй день

5. Натуральные числа m, n, k таковы, что число m^n делится на n^m, а число n^k делится на k^n. Докажите, что число m^k делится на k^m.

6. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC (но не в вершинах) выбраны точки D, E, F соответственно. Обозначим через d_0, d_1, d_2, d_3 длины наибольших сторон треугольников DEF, ADF, BDE, CEF. Докажите, что

$$d_0 \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\min(d_1, d_2, d_3).$$

В каких случаях имеет место равенство?

7. Множество M состоит из k попарно не пересекающихся отрезков, лежащих на одной прямой. Известно, что любой отрезок длины, не большей 1, можно расположить на прямой так, чтобы концы его принадлежали множеству M. Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих M, не меньше $1/k$.

8. В бесконечном десятичном разложении действительного числа a встречаются все цифры. Пусть v_n — количество различных цифровых отрезков длины n, встречающихся в этом разложении. Докажите, что если для некоторого n выполнено условие $v_n \leqslant n + 8$, то число a рационально.