Международная олимпиада «Туймаада» по математике

Старшая лига, 2014 год

Первый день

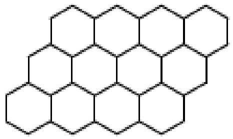
1. Четыре последовательных трёхзначных числа делят с остатком соответственно на четыре последовательных двузначных числа. Какое наименьшее число разных остатков может получиться?

2. На стороне BC треугольника ABC нашлись точки K и L такие, что $\angle BAK = \angle CAL = 90°$. Докажите, что середина высоты, опущенной из вершины A, середина отрезка KL и центр описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.

3. Положительные числа a, b и c удовлетворяют условию $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{b^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{c^3+1}} \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}}\,.$$

4. На бумаге с шестиугольными клеточками отметили «параллелограмм» $k \times \ell$ клеток (он состоит из k горизонтальных рядов по ℓ клеток в каждом; для примера на рисунке изображен параллелограмм 3×4). В этом параллелограмме выбрали набор непересекающихся сторон клеток, которые разбивают все узлы на пары. Сколькими способами это можно сделать?



Второй день

5. На столе лежит чётное число карточек, на каждой из которых написано натуральное число. Пусть a_k — количество карточек, на которых написано число k. Оказалось, что

$$a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots \geqslant 0$$

для каждого натурального n. Докажите, что карточки можно разложить по парам, в каждой из которых числа отличаются на 1.

6. На плоскости расположено n чёрных и n белых квадратов, каждый из которых может быть переведён в любой другой параллельным переносом. Каждые два квадрата разного цвета имеют общую точку. Докажите, что существует точка, принадлежащая хотя бы n квадратам.

7. Дан параллелограмм $ABCD$. Вневписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке L, а продолжения стороны BC — в точке K. Прямая DK пересекает диагональ AC в точке X; прямая BX пересекает медиану CC_1 треугольника ABC в точке Y. Докажите, что прямая YL, медиана BB_1 треугольника ABC и его же биссектриса CC' пересекаются в одной точке.

8. Пусть a, b, c — попарно взаимно простые натуральные числа. Обозначим через $g(a,b,c)$ наибольшее натуральное число, не представимое в виде $xa+yb+zc$ при натуральных x, y, z. Докажите, что

$$g(a,b,c) \geqslant \sqrt{2abc}\,.$$