Международная олимпиада «Туймаада» по математике

Старшая лига, 2013 год

Первый день

1. На столе лежит 100 куч камней. Два игрока делают ходы по очереди. За один ход разрешается взять со стола произвольное ненулевое количество камней так, чтобы этот ход затрагивал не более 99 куч. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для любого начального положения укажите, кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его противник.

2. Внутри ромба $ABCD$ выбраны точки X и Y так, что точка Y лежит внутри выпуклого четырёхугольника $BXDC$ и $2\angle XBY = 2\angle XDY = \angle ABC$. Докажите, что прямые AX и CY параллельны.

3. Вершины связного графа нельзя покрасить меньше чем в $n+1$ цвет так, чтобы соседние вершины были разного цвета. Докажите, что можно удалить из графа $n(n-1)/2$ рёбер без потери связности.

4. Докажите, что для любых положительных x, y, z, для которых $xyz = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{x^3}{x^2+y} + \frac{y^3}{y^2+z} + \frac{z^3}{z^2+x} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Второй день

5. Докажите, что любой многочлен четвёртой степени можно представить в виде

$$P(Q(x)) + R(S(x)),$$

где P, Q, R, S — квадратные трёхчлены.

6. Решите уравнение $p^2 - pq - q^3 = 1$ в простых числах.

7. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 — вершины правильного тетраэдра с ребром 1. Точки B_1 и B_2 лежат внутри фигуры, ограниченной плоскостью $A_1A_2A_3$ и сферами радиуса 1 с центрами A_1, A_2, A_3 и расположенной в том же полупространстве, что и точка A_4. Докажите, что

$$B_1B_2 < \max(B_1A_1, B_1A_2, B_1A_3, B_1A_4).$$

8. Карточки с номерами от 1 до 2^n раздают k детям, $1 \leqslant k \leqslant 2^n$, так, чтобы каждый ребёнок получил хотя бы одну карточку. Докажите, что количество способов раздать карточки делится на 2^{k-1}, но не делится на 2^k.