Международная олимпиада «Туймаада» по математике

Старшая лига, 2012 год

Первый день

1. Таня и Серёжа по очереди ставят фишки на свободные клетки шахматной доски. Первым ходом Таня ставит фишку на любую клетку доски. Каждым следующим ходом Серёжа должен ставить фишку в тот столбец, куда только что ходила Таня, а Таня — в ту строку, куда только что ходил Серёжа. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

2. Квадратный трёхчлен $P(x)$, имеющий два вещественных корня, для всех x удовлетворяет неравенству $P(x^3 + x) \geqslant P(x^2 + 1)$. Найдите сумму корней трёхчлена $P(x)$.

3. Внутри треугольника ABC выбрана точка P таким образом, что

$$\angle PAB = \angle PCB = \frac{1}{4}(\angle A + \angle C).$$

Пусть BL — биссектриса этого треугольника. Прямая PL пересекает описанную оружность треугольника APC в точке Q. Докажите, что прямая QB — биссектриса угла AQC.

4. Пусть $p = 4k + 3$ — простое число, а m/n — такая несократимая дробь, что

$$\frac{1}{0^2+1} + \frac{1}{1^2+1} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2+1} = \frac{m}{n}.$$

Докажите, что $2m - n$ делится на p.

Второй день

5. Решите уравнение $\dfrac{1}{n^2} - \dfrac{3}{2n^3} = \dfrac{1}{m^2}$ в натуральных числах.

6. Четырёхугольник $ABCD$ является одновременно вписанным и описанным. Вписанная окружность касается его сторон AB и CD в точках X и Y соответственно. Перпендикуляры, восставленные к сторонам AB и CD в точках A и D соответственно, пересекаются в точке U, перпендикуляры к ним же в точках X и Y пересекаются в точке V, и, наконец, в точках B и C — в точке W. Докажите, что U, V, W лежат на одной прямой.

7. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{2a^2+b^2+3} + \frac{1}{2b^2+c^2+3} + \frac{1}{2c^2+a^2+3} \leqslant \frac{1}{2}.$$

8. На рёбрах ориентированного графа расставлены целые числа, не кратные 2012. Назовём *весом вершины* разность между суммой чисел на всех входящих в неё рёбрах и суммой чисел на всех выходящих из неё рёбрах. Известно, что вес каждой вершины делится на 2012. Докажите, что на рёбрах того же графа можно так рассавить ненулевые целые числа, по модулю меньшие 2012, чтобы все вершины имели ненулевой вес.