Международная олимпиада «Туймаада» по математике

Старшая лига, 2011 год

Первый день

1. Красные, синие и зелёные дети встали в круг. Когда учительница попросила поднять руку красных детей, рядом с которыми стоит зелёный ребёнок, руку подняли 20 человек. А когда она попросила поднять руку синих детей, рядом с которыми стоит зелёный ребёнок, руку подняли 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку стоит сразу два зелёных ребёнка.

2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, точка M — середина AB. На прямой AB выбраны точки S_1 и S_2. Касательные, проведённые из S_1 к окружности ω_1, касаются её в точках X_1 и Y_1, а касательные из S_2 к ω_2 касаются её в точках X_2 и Y_2. Докажите, что если прямая X_1X_2 проходит через M, то прямая Y_1Y_2 тоже проходит через M.

3. На каждой клетке бесконечной шахматной доски написано наименьшее количество ходов, за которое конь может дойти от этой клетки до данной клетки O. Назовём клетку *особой*, если на ней написано число 100, а на всех соседних с ней (по стороне) клетках — 101. Сколько существует особых клеток?

4. На отрезке натурального ряда имеется ровно 10 четвёртых степеней и ровно 100 кубов. Докажите, что на этом отрезке не менее 2000 точных квадратов.

Второй день

5. Все числа, бóльшие 1, покрашены в два цвета (оба цвета использованы). Докажите, что существуют такие вещественные a и b, что числа $a + 1/b$ и $b + 1/a$ разного цвета.

6. Дано слово более чем из 10 букв, в котором любые две соседние буквы различны. Докажите, что можно поменять местами две соседние буквы так, чтобы полученное слово не было периодическим (не разбивалось на одинаковые подслова).

7. Дан выпуклый шестиугольник $AC'BA'CB'$, у которого каждые две противоположные стороны равны; A_1 — точка пересечения BC и серединного перпендикуляра к AA'. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

8. Пусть $P(n)$ — квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами. Для каждого натурального n у числа $P(n)$ нашёлся собственный делитель d_n (т. е. $1 < d_n < P(n)$), причём последовательность (d_n) возрастающая. Докажите, что либо $P(n)$ можно разложить в произведение двух линейных многочленов с целыми коэффициентами, либо значения $P(n)$ во всех натуральных точках делятся на одно и то же натуральное $m > 1$.