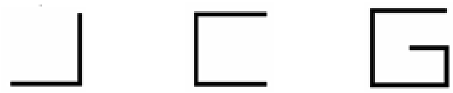
Турнир городов

8–9 классы, весенний тур, сложный вариант, 2016/17 год

1. В шахматном турнире было 10 участников. В каждом туре участники разбивались на пары и в каждой паре играли друг с другом одну игру. В итоге каждый участник сыграл с каждым ровно один раз, причём не меньше чем в половине всех игр участники были земляками (из одного города). Докажите, что в каждом туре хоть одна игра была между земляками.

2. Можно ли нарисовать на клетчатой бумаге многоугольник и поделить его на две равные части разрезом такой формы, как показано на рисунке: а) слева; б) в центре; в) справа?



(Во всех пунктах разрез лежит внутри многоугольника, на границу выходят только концы разреза. Стороны многоугольника и звенья разреза идут по линиям сетки, маленькие звенья в два раза короче больших.)

3. Взяли несколько положительных чисел и построили по ним такую последовательность: a_1 — сумма исходных чисел, a_2 — сумма квадратов исходных чисел, a_3 — сумма кубов исходных чисел, и т. д.

а) Могло ли случиться, что до a_5 последовательность убывает ($a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$), а начиная с a_5 — возрастает ($a_5 < a_6 < a_7 < \ldots$)?

б) А могло ли случиться наоборот: до a_5 последовательность возрастает, а начиная с a_5 — убывает?

4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ все стороны равны, а также $AD = BE = CF$. Докажите, что в этот шестиугольник можно вписать окружность.

5. Вес каждой гирьки набора — нецелое число грамм. Ими можно уравновесить любой целый вес от 1 г до 40 г (гири кладутся на одну чашку весов, измеряемый вес — на другую). Каково наименьшее число гирь в таком наборе?

6. Кузнечик умеет прыгать по полоске из n клеток на 8, 9 и 10 клеток в любую сторону. Будем называть натуральное число n *пропрыгиваемым*, если кузнечик может, начав с некоторой клетки, обойти всю полоску, побывав на каждой клетке ровно один раз. Найдите хотя бы одно $n > 50$, которое не является пропрыгиваемым.

7. Доминошки 1×2 кладут без наложений на шахматную доску 8×8. При этом доминошки могут вылезать за границу доски, но центр каждой доминошки должен лежать строго внутри доски (не на границе). Положите таким образом на доску

а) хотя бы 40 доминошек;

б) хотя бы 41 доминошку;

в) более 41 доминошки.