Турнир городов

8–9 классы, осенний тур, базовый вариант, 2016/17 год

1. Взяли пять натуральных чисел и для каждых двух записали их сумму. Могло ли оказаться, что все 10 получившихся сумм оканчиваются разными цифрами?

2. На прямой отмечено четыре точки и ещё одна точка отмечена вне прямой. Всего существует шесть треугольников с вершинами в этих точках. Какое наибольшее количество из них могут быть равнобедренными?

3. На окружности отмечено 100 точек. Эти точки нумеруются числами от 1 до 100 в некотором порядке.

а) Докажите, что при любой нумерации точки можно разбить на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были нечётными.

б) Верно ли, что при любой нумерации можно разбить точки на пары так, чтобы отрезки, соединяющие точки в парах, не пересекались, а все суммы в парах были чётными?

4. Даны параллелограмм $ABCD$ и такая точка K, что $AK = BD$. Точка M — середина CK. Докажите, что $\angle BMD = 90°$.

5. Сто медвежат нашли в лесу ягоды: самый младший успел схватить 1 ягоду, медвежонок постарше — 2 ягоды, следующий — 4 ягоды, и так далее, самому старшему досталось 2^{99} ягод. Лиса предложила им поделить ягоды «по справедливости». Она может подойти к двум медвежатам и распределить их ягоды поровну между ними, а если при этом возникает лишняя ягода, то лиса её съедает. Такие действия она продолжает до тех пор, пока у всех медвежат не станет ягод поровну. Какое наименьшее количество ягод может оставить медвежатам лиса?