Турнир городов

8–9 классы, весенний тур, сложный вариант, 2015/16 год

1. На длинной ленте бумаги выписали все числа от 1 до 1000000 включительно (в некотором произвольном порядке). Затем ленту разрезали на кусочки по две цифры в каждом кусочке. Докажите, что в каком бы порядке ни выписывались числа, на кусочках встретятся все двузначные числа.

2. Существуют ли такие целые числа a и b, что

а) уравнение $x^2 + ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + ax + b = 0$ имеет;

б) уравнение $x^2 + 2ax + b = 0$ не имеет корней, а уравнение $[x^2] + 2ax + b = 0$ имеет?

а) Да; б) нет

3. Дан квадрат со стороной 10. Разрежьте его на 100 равных четырёхугольников, каждый из которых вписан в окружность диаметра $\sqrt{3}$.

4. Художник-абстракционист взял деревянный куб $5\times5\times5$, разбил каждую грань на единичные квадраты и окрасил каждый из них в один из трёх цветов — чёрный, белый или красный — так, что нет соседних по стороне квадратов одного цвета. Какое наименьшее число чёрных квадратов могло при этом получиться? (Квадраты, имеющие общую сторону, считаются соседними и в случае, если они лежат на одной грани куба, и в случае, если они лежат на разных гранях куба.)

18

5. Пусть p — простое число, большее 10^k. Взяли число, кратное p, и вставили между какими-то двумя его соседними цифрами k-значное число A. Получили число, кратное p. В него вставили k-значное число B — между двумя соседними цифрами числа A, — и результат снова оказался кратным p. Докажите, что число B получается из числа A перестановкой цифр.

6. Робот-пылесос, имеющий форму круга, проехал по плоскому полу. Для каждой точки граничной окружности робота можно указать прямую, на которой эта точка оставалась в течение всего времени движения. Обязательно ли и центр робота оставался на некоторой прямой в течение всего времени движения?

Нет

7. а) Есть $2n+1$ батарейка ($n > 2$). Известно, что хороших среди них на одну больше, чем плохих, но какие именно батарейки хорошие, а какие плохие, неизвестно. В фонарик вставляются две батарейки, при этом он светит, только если обе — хорошие. За какое наименьшее число таких попыток можно гарантированно добиться, чтобы фонарик светил?

б) Та же задача, но батареек $2n$ ($n > 2$), причём хороших и плохих поровну.

а) $n+2$; б) $n+3$