Турнир городов

10–11 классы, весенний тур, сложный вариант, 2015/16 год

1. На длинной ленте бумаги выписали все числа от 1 до 1000000 включительно (в некотором произвольном порядке). Затем ленту разрезали на кусочки по две цифры в каждом кусочке. Докажите, что в каком бы порядке ни выписывались числа, на кусочках встретятся все двузначные числа.

2. Дан квадрат со стороной 10. Разрежьте его на 100 равных четырёхугольников, каждый из которых вписан в окружность диаметра $\sqrt{3}$.

3. Пусть M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На сторонах AB и BC отмечены соответственно точки E и F так, что $AE \neq CF$ и $\angle FMC = \angle MEF = \alpha$. Найдите $\angle AEM$.

α

4. В стране 64 города, некоторые пары из них соединены дорогой, но нам неизвестно, какие именно. Мы можем выбрать любую пару городов и получить ответ на вопрос «есть ли дорога между ними?». Мы хотим узнать, можно ли в этой стране добраться от любого города до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что не существует алгоритма, позволяющего сделать это менее чем за 2016 вопросов.

5. На доске написано несколько приведённых многочленов 37-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена f и g и заменить их на такие два приведённых многочлена 37-й степени f_1 и g_1, что $f + g = f_1 + g_1$ или $fg = f_1 g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 37 различных положительных корней.

6. а) Есть неограниченный набор карточек со словами «*abc*», «*bca*», «*cab*». Из них составляют слово по такому правилу. В качестве начального слова выбирается любая карточка, а далее на каждом шаге к имеющемуся слову можно либо приклеить карточку слева или справа, либо разрезать слово в любом месте (между буквами) и вклеить карточку туда. Можно ли так составить палиндром?

б) Есть неограниченный набор красных карточек со словами «*abc*», «*bca*», «*cab*» и синих карточек со словами «*cba*», «*acb*», «*bac*». Из них по тем же правилам составили палиндром. Верно ли, что было использовано одинаковое количество красных и синих карточек?

а) Нет; б) да

7. На сферической планете с длиной экватора 1 планируют проложить N кольцевых дорог, каждая из которых будет идти по окружности длины 1. Затем по каждой дороге запустят несколько поездов. Все поезда будут ездить по дорогам с одной и той же положительной постоянной скоростью, никогда не останавливаясь и не сталкиваясь. Какова в таких условиях максимально возможная суммарная длина всех поездов? Поезда считайте дугами нулевой толщины, из которых выброшены концевые точки. Решите задачу в случаях: а) $N = 3$; б) $N = 4$.

а) 3/2; б) 2