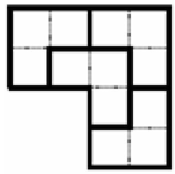
Турнир городов

8–9 классы, осенний тур, сложный вариант, 2015/16 год



1. Будем называть клетчатый многоугольник *выдающимся*, если он не является прямоугольником и из нескольких его копий можно сложить подобный ему многоугольник. Например, уголок из трёх клеток — выдающийся многоугольник (см. рисунок).

а) Придумайте выдающийся многоугольник из четырёх клеток.

б) При каких $n > 4$ существует выдающийся многоугольник из n клеток?

б) При любых

2. Из целых чисел от 1 до 100 удалили k чисел. Обязательно ли среди оставшихся чисел можно выбрать k различных чисел с суммой 100, если

а) $k = 9$;

б) $k = 8$?

а) Нет; б) да

3. Докажите, что сумма длин любых двух медиан произвольного треугольника

а) не больше $3P/4$, где P — периметр этого треугольника;

б) не меньше $3p/4$, где p — полупериметр этого треугольника.

4. Из спичек сложен клетчатый квадрат 9×9, сторона каждой клетки — одна спичка. Петя и Вася по очереди убирают по спичке, начинает Петя. Выиграет тот, после чьего хода не останется целых квадратиков 1×1. Кто может действовать так, чтобы обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Вася

5. В треугольнике ABC медианы AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в точке M. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников MA_0B_0, MCB_0, MA_0C_0, MBC_0 и точка M лежат на одной окружности.

6. Петя увидел на доске несколько различных чисел и решил составить выражение, среди значений которого все эти числа есть, а других нет. Составляя выражение, Петя может использовать какие угодно числа, особый знак «$\pm$», а также обычные знаки «$+$», «$-$», «$\times$» и скобки. Значения составленного выражения он вычисляет, выбирая для каждого знака «$\pm$» либо «$+$», либо «$-$» во всех возможных комбинациях. Например, если на доске были числа 4 и 6, подойдёт выражение 5 ± 1, а если на доске были числа 1, 2 и 3, то подойдёт выражение $(2 \pm 0{,}5) \pm 0{,}5$. Возможно ли составить необходимое выражение, если на доске были написаны

а) числа 1, 2, 4;

б) любые 100 различных действительных чисел?

а) Да; б) да

7. У Деда Мороза было n сортов конфет, по k штук каждого сорта. Он распределил все конфеты как попало по k подаркам, в каждый — по n конфет, и раздал их k детям. Дети решили восстановить справедливость. Два ребёнка готовы передать друг другу по конфете, если каждый получает конфету сорта, которого у него нет. Всегда ли можно организовать серию обменов так, что у каждого окажутся конфеты всех сортов?

Да