Турнир городов

8–9 классы, осенний тур, базовый вариант, 2015/16 год

1. Верно ли, что любое натуральное число можно умножить на одно из чисел 1, 2, 3, 4 или 5 так, чтобы результат начинался на цифру 1?

2. Из одинаковых неравнобедренных прямоугольных треугольников составили прямоугольник (без дырок и наложений). Обязательно ли какие-то два из этих треугольников расположены так, что образуют прямоугольник?

3. Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.

4. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отметили точки K и L соответственно, а на гипотенузе AB — точку M так, что $AK = BL = a$, $KM = LM = b$ и угол KML прямой. Докажите, что $a = b$.

5. В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелёт. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов А и Б перелёт из А в Б стоит столько же, сколько перелёт из Б в А. Средняя стоимость перелёта равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелётов, начав и закончив в своём родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если

а) $m = 99$;

б) $m = 100$?