Турнир городов

10–11 классы, осенний тур, базовый вариант, 2015/16 год

1. Пусть p — простое число. Сколько существует таких натуральных n, что pn делится на $p+n$?

Одно

2. Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC и прямоугольный треугольник ABD с общей гипотенузой AB (D и C лежат по одну сторону от прямой AB). Пусть DK — биссектриса треугольника ABD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ACK лежит на прямой AD.

3. Трое играют в «камень-ножницы-бумагу». В каждом раунде каждый наугад показывает «камень», «ножницы» или «бумагу». «Камень» побеждает «ножницы», «ножницы» побеждают «бумагу», «бумага» побеждает «камень». Если в раунде было показано ровно два различных элемента (и значит, один из них показали дважды), то игроки (или игрок), показавшие победивший элемент, получают по 1 баллу; иначе баллы никому не начисляются. После нескольких раундов оказалось, что все элементы были показаны одинаковое количество раз. Докажите, что в этот момент сумма набранных всеми баллов делилась на 3.

4. В стране 100 городов, между каждыми двумя городами осуществляется беспосадочный перелёт. Все рейсы платные и стоят положительное (возможно, нецелое) число тугриков. Для любой пары городов А и Б перелёт из А в Б стоит столько же, сколько перелёт из Б в А. Средняя стоимость перелёта равна 1 тугрику. Путешественник хочет облететь какие-нибудь m разных городов за m перелётов, начав и закончив в своём родном городе. Всегда ли ему удастся совершить такое путешествие, потратив на билеты не более m тугриков, если

а) $m = 99$;

б) $m = 100$?

а) Нет; б) да

5. Дана бесконечно возрастающая арифметическая прогрессия. Первые её несколько членов сложили и сумму объявили первым членом новой последовательности, затем сложили следующие несколько членов исходной прогрессии и сумму объявили вторым членом новой последовательности, и так далее. Могла ли новая последовательность оказаться геометрической прогрессией?

Да