Турнир городов

8–9 классы, весенний тур, сложный вариант, 2014/15 год

1. Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что прямая DE перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков AE и BC.

2. Секретная база окружена прозрачным извилистым забором в форме невыпуклого многоугольника, снаружи — болото. Через болото проложена прямая линия электропередач из 36 столбов, часть из которых стоит снаружи базы, а часть — внутри. (Линия электропередач не проходит через вершины забора.) Шпион обходит базу снаружи вдоль забора так, что забор всё время по правую руку от него. Каждый раз, оказавшись на линии электропередач, он считает, сколько всего столбов находится по левую руку от него (он их все видит). К моменту, когда шпион обошёл весь забор, он насчитал в сумме 2015 столбов. Сколько столбов находится внутри базы?

Один

3. а) Натуральные числа x, x^2 и x^3 начинаются с одной и той же цифры. Обязательно ли эта цифра — единица?

б) Тот же вопрос для натуральных чисел x, x^2, x^3, $\ldots$, x^{2015}.

а) Нет; б) нет

4. Каждая сторона некоторого многоугольника обладает таким свойством: на прямой, содержащей эту сторону, лежит ещё хотя бы одна вершина многоугольника. Может ли число вершин этого многоугольника

а) не превосходить девяти;

б) не превосходить восьми?

а) Да; б) да

5. а) В таблицу $2 \times n$ (где $n > 2$) вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Докажите, что можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны.

б) В таблицу 10×10 вписаны числа. Суммы во всех столбцах различны. Всегда ли можно переставить числа в таблице так, чтобы суммы в столбцах были различны и суммы в строках были различны?

б) Нет

6. Внутри окружности расположен равносторонний N-угольник. Каждую его сторону продлевают в обе стороны до пересечения с окружностью, получая по два новых отрезка, расположенных вне многоугольника. Затем некоторые из $2N$ полученных отрезков красятся в красный цвет, а остальные — в синий цвет. Докажите, что можно раскрасить эти отрезки так, чтобы сумма длин красных отрезков равнялась сумме длин синих.

7. Император пригласил на праздник 2015 волшебников, некоторые из которых добрые, а остальные злые. Добрый волшебник всегда говорит правду, а злой может говорить что угодно. При этом волшебники знают, кто добрый и кто злой, а император нет. На празднике император задает каждому волшебнику (в каком хочет порядке) по вопросу, на которые можно ответить «да» или «нет». Опросив всех волшебников, император изгоняет одного. Изгнанный волшебник выходит в заколдованную дверь, и император узнает, добрый он был или злой. Затем император вновь задает каждому из оставшихся волшебников по вопросу, вновь одного изгоняет, и так далее, пока император не решит остановиться (он может это сделать после любого вопроса). Докажите, что император может изгнать всех злых волшебников, удалив при этом не более одного доброго.