Турнир городов

10–11 классы, осенний тур, сложный вариант, 2014/15 год

1. Докажите, что в любом описанном около окружности многоугольнике найдутся три стороны, из которых можно составить треугольник.

2. На кольцевой дороге через равные промежутки расположены 25 постов, на каждом стоит полицейский. Полицейские пронумерованы в каком-то порядке числами от 1 до 25. Требуется, чтобы они перешли по дороге так, чтобы снова на каждом посту был полицейский, но по часовой стрелке за номером 1 стоял номер 2, за номером 2 стоял номер 3, …, за номером 25 стоял номер 1. Докажите, что если организовать переход так, чтобы суммарное пройденное расстояние было наименьшим, то кто-то из полицейских останется на своём посту.

3. Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.

99

4. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках A', B', C' соответственно. Прямые AA', BB' и CC' пересекаются в точке G. Окружность, описанная около треугольника $GA'B'$, вторично пересекает прямые AC и BC в точках C_A и C_B. Аналогично определяются точки A_B, A_C, B_C, B_A. Докажите, что точки A_B, A_C, B_C, B_A, C_A, C_B лежат на одной окружности.

5. Петя подсчитал количество всех возможных m-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только четыре буквы T, O, W и N, причем в каждом слове букв T и O поровну. Вася подсчитал количество всех возможных $2m$-буквенных слов, в записи которых могут использоваться только две буквы T и O, и в каждом слове этих букв поровну. У кого слов получилось больше? (Слово — это любая последовательность букв.)

Поровну

6. На столе лежал проволочный треугольник с углами x°, y°, z°. Хулиган Коля согнул каждую сторону треугольника на один градус, в результате чего получился невыпуклый шестиугольник с внутренними углами $(x-1)^\circ$, 181°, $(y-1)^\circ$, 181°, $(z-1)^\circ$, 181°. Докажите, что точки сгиба делили стороны исходного треугольника в одном и том же отношении.

7. В некотором государстве ценятся золотой и платиновый песок. Золото можно менять на платину, а платину на золото по курсу, который определяется натуральными числами g и p так: x граммов золотого песка равноценны y граммам платинового, если $xp = yg$ (числа x и y могут быть нецелыми). Сейчас у банкира есть по килограмму золотого и платинового песка, а $g = p = 1001$. Государство обещает каждый день уменьшать одно из чисел g и p на единицу, так что через 2000 дней они оба станут единицами; но последовательность уменьшений неизвестна. Может ли банкир каждый день менять песок так, чтобы в конце гарантированно получить хотя бы по 2 кг каждого песка?

Нет