Олимпиада И. В. Савельева по математике

11 класс, 2010 год

1. Решите уравнение
$$\sin(1005\pi x) = \cos(2010\pi x).$$
Сколько решений принадлежит отрезку $[0; 2]$?

2. Для любого целого n решить уравнение:
$$|2x + n| + (-1)^n|3x + 11 - 4n| = 0.$$
При каких n уравнение имеет два целых решения?

3. Представьте, что вы находитесь на скачках кузнечиков, проводимых по следующим правилам: два кузнечика одновременно начинают прыгать по прямой из точки A в точку B и обратно. Вернувшись в A, они повторяют маршрут, и т. д. Скорость первого кузнечика равна 12 ед/с, скорость второго равна 5 ед/с, расстояние между A и B равно 60 единиц. Бега продолжаются 60 секунд. Какое время кузнечики могут видеть друг друга? Считать, что кузнечик прыгает головой вперёд и видит только то, что находится перед ним.

4. При каких значениях параметра b прямая, заданная уравнением $y = (b^2 + 2b - 2)x + b$, пересекает прямоугольник $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 2$? Найти длину отрезка этой прямой, лежащего внутри прямоугольника при $b = 1$.

5. Площадь основания прямой треугольной призмы равна S. Радиус шара, описанного около призмы, равен R. Какое наибольшее значение при этих условиях может принимать объём призмы?

Ответы

1. $x = \frac{4n+1}{6030}$, $n \in \mathbb{Z}$; 3015 решений.

2. Если $n = 2$, то $x = -1$; при остальных чётных n решений нет; если n нечётно, то $x = 5n - 11$ и $x = \frac{3n-11}{5}$. Два целых решения будет при $n = 10k + 7$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. $\frac{240}{17}$ секунд.

4. $a \in (-\infty; -3] \cup [0; 2]$; $l = \sqrt{2}$.

5. $V_{\max} = \sqrt{R^2 - \frac{4S}{3\sqrt{3}}}$.