Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

8 класс, 2013 год

1. Дан треугольник ABC, точка Q — центр вневписанной окружности, касающейся стороны BC и продолжений двух других сторон треугольника. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных вокруг треугольников ABC и ABQ, если радиус первой (описанной около ΔABC) равен R.

2. Агент Бонд (Джеймс Бонд) возводит число 7 в последовательные натуральные степени: $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, ...

а) Верно ли, что в какой-то момент он получит число (отличное от 7), которое оканчивается на ...7?

б) Верно ли, что рано или поздно он получит число, которое оканчивается на ...007?

3. Решите систему:

$$\begin{cases} x\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)+y\left(1+y^2\right)\left(1+y^4\right)=0, \\ xy+1000=0. \end{cases}$$

4. Великий алхимик Теофраст фон Парацетамол приготовил колбу с водным раствором эликсира вечной молодости. Первому покупателю Теофраст продал 1/2013 часть объёма колбы и затем долил колбу доверху дистиллированной водой. Второму покупателю он продал 1/2012 часть объёма колбы и снова долил водой, и так далее. Последнему покупателю он продал 1/2 колбы и снова долил колбу водой. В результате концентрация эликсира молодости в колбе стала равна 0,02%. Какова была изначальная концентрация эликсира?

5. Дана бесконечная последовательность:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$$

Можно ли выбрать из неё 100 чисел так, чтобы они образовывали арифметическую прогрессию?

6. а) Представьте число 2013 в виде суммы нескольких (более одного) последовательных натуральных чисел.

б) Выясните, какое наибольшее количество слагаемых может содержать такая сумма (при условии, что слагаемые — последовательные натуральные числа).

7. Учитель написал на доске многочлены с целыми коэффициентами:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad \text{и} \quad Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

и дал задание найти целое значение x, такое, что $P(x)$ делится (нацело) на $Q(x)$. Петя Васечкин взялся за дело и, взяв для начала $x = 0$, получил $P(0) = 4$, $Q(0) = 3$. «Не делится», — подумал Петя, и решил подставить $x = 1$. Получилось $P(1) = -137$, $Q(1) = 0$. «На ноль делить нельзя», — подумал Петя. Он попробовал взять $x = 2$, но там получались большие числа и Петя запутался в вычислениях. Напоследок он решил попробовать взять $x = -1$ и получил $P(-1) = 137$, $Q(-1) = -6$. «Да таких значений x просто не существует!» — воскликнул Петя. Прав ли он?

8. Найдите наименьшее значение выражения

$$2\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(x-2)^2+4}+\sqrt{(x-3)^2+16}\,.$$

Ответы

1. R.

2. а) Да; б) да.

3. $\left(10\sqrt{10}, -10\sqrt{10}\right)$, $\left(-10\sqrt{10}, 10\sqrt{10}\right)$.

4. 40,26%.

5. Можно.

6. б) 61.

7. Прав.

8. $5\sqrt{5}$.