Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

9 класс, 2018 год, вариант 1b

1. Натуральные числа, у которых сумма цифр равна 5, упорядочили по возрастанию. Какое число стоит на 111-м месте?

23000

2. Тринадцать миллионеров приехали на экономический форум и поселились в отеле «Super Luxury+». В отеле есть номера трёх различных типов: 6-звёздочные, 7-звёздочные, и 8-звёздочные. Надо расселить миллионеров, причём так, чтобы использовать все три типа номеров (т. е. хотя бы одного человека поселить в 6-звёздочный номер, хотя бы одного — в 7-звёздочный и хотя бы одного — в 8-звёздочный). При этом нельзя более богатого миллионера селить в номер с меньшим количеством звёздочек, чем у менее богатого.

Сколькими способами их можно расселить (состояния у всех миллионеров попарно разные)?

66

3. На прямой расположены 15 точек $A_1, \ldots, A_{15}$, идущие с промежутками 1 см. Петя строит окружности по следующим правилам.

a) Окружности не пересекаются и не касаются.

b) Внутри каждой окружности есть по крайней мере одна из указанных точек $A_1, \ldots, A_{15}$.

c) Ни одна из этих точек не лежит на окружности.

d) Различные окружности содержат внутри себя различные наборы точек. Т. е., например, если какая-то окружность содержит точки A_1 и A_2 внутри, а остальные снаружи, то вторую окружность, содержащую только A_1 и A_2 внутри, построить уже нельзя.

Какое наибольшее количество окружностей Петя сможет построить по этим правилам?

4. Назовём число x «20-подпирающим», если для любых 20 действительных чисел $a_1, \ldots, a_{20}$, сумма которых является целым числом, найдётся хотя бы одно, для которого $\left|a_i - \frac{1}{2}\right| \geqslant x$.

В ответе укажите наибольшее 20-подпирающее число x, округлённое до тысячных по стандартным математическим правилам.

0,025

5. Последовательность a_n задана следующим образом:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{2a_n}{n} \quad (\text{при } n \geqslant 1).$$

Найдите a_{100}.

10100

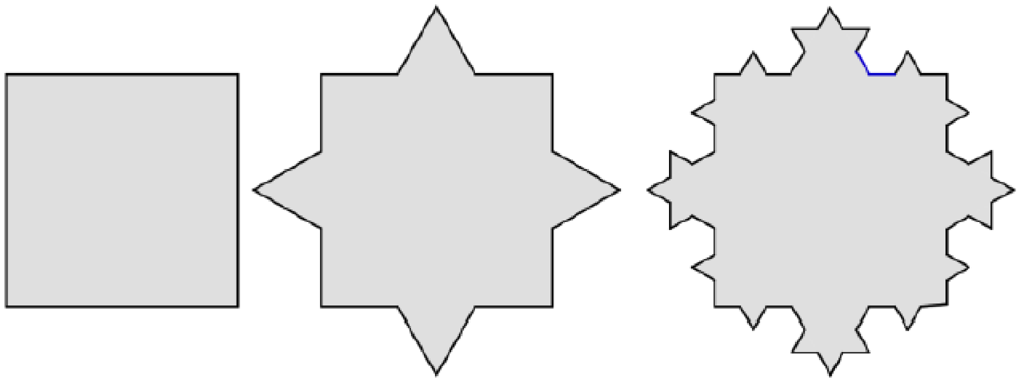
6. Назовём «зазубриванием» следующую операцию над многоугольником.

а) Каждую сторону многоугольника делим на три равные части.

б) Среднюю часть выбираем в качестве основания равностороннего треугольника, расположенного снаружи многоугольника.

в) Удаляем основание и добавляем две другие стороны.

Пусть K_0 — квадрат со стороной 2, K_1 — многоугольник, полученный путём зазубривания K_0, K_2 получен зазубриванием K_1 (см. рисунок), …, K_{2018} получен зазубриванием K_{2017}.



Найдите площадь $S(K_{2018})$. Ответ округлите до сотых по стандартным математическим правилам.

6,4