Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2018 год, Железноводск

1. Решите уравнение
$$\lg\left(-x^3 - x\right) = \log_2 |x|.$$

$\boxed{x = -2}$

2. На выборах кандидат получил от 50,332% до 50,333% голосов. Какое при этом могло быть наименьшее число избирателей?

$\boxed{451}$

3. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{x+2017}+\sqrt{x+2018}} = 42.$$

$\boxed{7}$

4. Прямая, проходящая через точки, симметричные основанию высоты AD остроугольного треугольника ABC относительно сторон AC и AB, пересекает эти стороны в точках E и F соответственно. Найдите расстояние от точки B до точки пересечения отрезков BE и CF, если $AC = b$ и $\angle ABC = \beta$.

$\boxed{x = b \operatorname{ctg} \beta}$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство
$$\left(x + \log_4 |a|\right)\left(x + \log_{|a|} 4\right)\left(x^2 + 10 \cdot 2^a \cdot x + a^2 - 3\right) \geqslant 0$$
выполняется для любого x.

$\boxed{a = -4,\ a = -2}$