Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2018 год, Челябинск

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x-2}-3} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}-2}.$$

$\boxed{[2;5)\cup(11;+\infty)}$

2. Незнайка собирается приготовить ко дню своего рождения три бочки малинового морса, смешивая малину с водой, причём процентное содержание малины в бочках будет таково, что если смешать содержимое бочек в отношении $1:2:3$, то получится 10% морс, а если в пропорции $5:4:3$, то получится 25% морс. Каким будет процентное содержание малины в морсе при смешивании равных количеств исходных трёх растворов? Каким планируется содержание малины в третьей бочке?

$\boxed{20\%;\ 0}$

3. Найдите площадь треугольника ABC, в котором $AB=4$, $AC=5$ и $\cos(\angle B-\angle C)=\frac{11}{91}$.

$\boxed{\frac{5\sqrt{15}}{4}}$

4. Для функции $f(x)=-\frac{x^2}{1+x^2}$ найдите сумму

$$f\left(\frac{1}{2018}\right)+f\left(\frac{1}{2017}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)+f(2)+\ldots+f(2017)+f(2018).$$

$\boxed{-2017{,}5}$

5. Найдите наименьшее значение $|x-y|$ при условии

$$\left(\cos^4 x+1\right)\left(4\cos^4 y+1\right)=8\cos^3 x\cos^2 y,\quad x\in[\pi;2\pi],\quad y\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right].$$

$\boxed{\frac{3\pi}{4}}$