Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2018 год, Саратов

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-4x+5}+\sqrt{3x^2-12x+13}\leqslant 4x-x^2-2.$$

$\boxed{x=2}$

2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством

$$\arcsin(2x)+\arccos(2x)\geqslant\frac{\pi}{4}\cdot\left(y^2-2\right).$$

$\boxed{4}$

3. Найдите наименьшее натуральное число q, для которого существует такое целое число p, что уравнение $x^4+px^2+q=0$ имеет четыре корня, образующих арифметическую прогрессию.

$\boxed{9}$

4. В треугольник ABC, в котором сумма сторон AB и BC в $9/5$ раз больше стороны AB, вписана окружность, касающаяся сторон BC, AC и AB в точках M, N и K соответственно. Отношение площади треугольника MNC к площади треугольника ABC равно r. Найдите при данных условиях:

а) наименьшее значение r;

б) все возможные значения r.

$\boxed{\text{а) } \frac{16}{81};\ \text{б) } \left[\frac{16}{81};\frac{2}{7}\right)}$

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$16^x-6\cdot 8^x+8\cdot 4^x+(2-2a)\cdot 2^x-a^2+2a-1=0$$

имеет ровно три различных корня.

$\boxed{(-3;-2)\cup(-2;1)\cup(1;2)}$