Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

10–11 классы, 2016 год, Сочи

1. На соревнования по лёгкой атлетике ученики школы приехали на автобусе, вмещающем не более 40 человек. Каждый из них участвовал в одном из видов соревнований. При этом $1/7$ часть учеников завоевали золотые медали, $1/4$ часть — серебряные и ещё $1/4$ — бронзовые. На обратном пути медалисты решили собрать деньги и купить по одному торту каждому из спортсменов, оставшемуся без медалей. Сколько тортов им придётся покупать?

$\boxed{10}$

2. Какие значения может принимать выражение $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$, где x_1 и x_2 — несовпадающие между собой корни уравнения $x^3 - 2015x + 2016 = 0$?

$\boxed{2015}$

3. В окружность с центром O вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали AC и BD которого пересекаются в точке M, причём $AM = 4$, $AB = 6$. Определите, какой может быть наименьшая длина диагонали BD, если известно, что стороны AB и AD равноудалены от точки O.

$\boxed{4\sqrt{5}}$

4. Найдите сумму всех принадлежащих отрезку $[-75; 5]$ целых решений неравенства

$$\frac{\sin\frac{\pi x}{2} - \cos\frac{\pi x}{2} + 1}{\sin\frac{\pi x}{2} + \cos\frac{\pi x}{2} - 1} \geqslant \sin\left(\arcsin\frac{x}{10}\right) - \frac{x}{10}\,.$$

$\boxed{-12}$

5. Укажите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 2y(x-a) + a^2 = 0, \\ 2^{-2-y} \cdot \log_2 x < 1 \end{cases}$$

имеет решения, и найдите эти решения.

$\boxed{-2 < a < 0;\ x = -a,\ y = a}$