

## Олимпиада «Покори Воробьёвы горы!» по математике

9 класс, 2015 год

1. В ролевой игре «Worlds of MSU» имеются три класса: воин, маг, целитель. Каждый игрок может управлять персонажем некоторого класса (одиночный класс) или персонажем, совмещающим способности двух классов (двойной класс), например, маг-целитель. Партия из 32 игроков штурмует «Цитадель зла». Известно, что целителей (т. е. всех, имеющих способности целителей) в два раза больше магов и в  $k$  раз меньше, чем воинов ( $k$  — целое число, большее двух). Сколько игроков имеют одиночный класс, если известно, что игроков, имеющих двойной класс, на 2 больше, чем целителей?

26

2. В четырёхугольнике  $ABCD$  известно, что  $AB = BC$ ,  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ . Из вершины  $B$  опущен перпендикуляр  $BH$  на сторону  $AD$ . Найдите площадь четырёхугольника  $ABCD$ , если известно, что  $BH = h$ .

24

3. Будем обозначать  $\max(A, B, C)$  наибольшее из чисел  $A, B, C$ . Найдите наименьшее значение величины

$$\max(x^2 + |y|, (x + 2)^2 + |y|, x^2 + |y - 1|).$$

23

4. Число 2015 можно представить в виде суммы последовательных целых чисел различным образом, например  $2015 = 1007 + 1008$  или  $2015 = 401 + 402 + 403 + 404 + 405$ . Сколькими способами это можно сделать?

91

5. Известно, что при некоторых натуральных  $a, b$  число  $N = \frac{a^2 + b^2}{ab - 1}$  — тоже натуральное. Найдите все возможные значения  $N$ .

5

6. В треугольник  $ABC$  вписана окружность с центром  $O$ , к которой проведена касательная, пересекающая стороны  $AC$  и  $AB$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Найдите угол  $A$  треугольника  $ABC$ , если  $\angle MON = 26^\circ$ .

1281

7. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x, y) = \frac{2015(x + y)}{\sqrt{2015x^2 + 2015y^2}}$$

и укажите все пары  $(x, y)$ , при которых оно достигается.

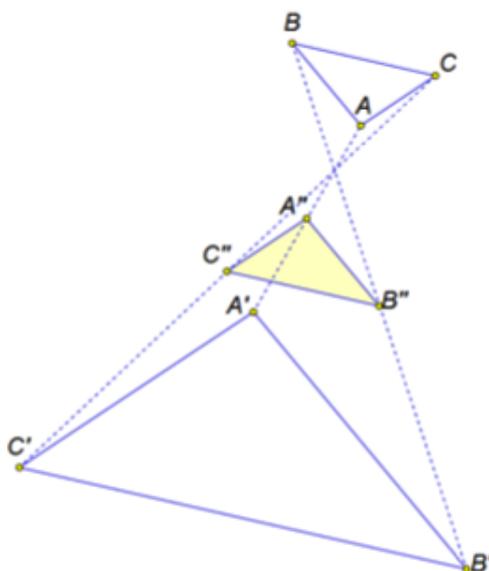
$0 > n = x \text{ или } 0 \leq n < \sqrt{-}$

8. Даны 2015 попарно взаимно простых натуральных чисел, не превосходящих  $10^7$ . Могут ли они все быть составными?

Нет

9. Даны треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$ , площади которых равны 1 и 2025 соответственно. Известно, что лучи  $AB$  и  $A'B'$  параллельны и идут в противоположных направлениях (см. рисунок). То же верно и для пар  $BC$  и  $B'C'$ ,  $CA$  и  $C'A'$ . Точки  $A''$ ,  $B''$  и  $C''$  — середины отрезков  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ . Найдите площадь треугольника  $A''B''C''$ .

484



10. Найдите функцию  $f(x)$ , о которой известно, что

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot f\left(\frac{2x+3}{x-2}\right) + 3 & \text{при } x \neq 2, \\ 0 & \text{при } x = 2. \end{cases}$$

$$\frac{(1+x+z^2)z}{(x-z)(1+x)z} = (x)f$$